Séquence 1

Second degré

Sommaire

1 Pré-requis

A Fonction polynôme de degré 2

Définitions

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une fonction **polynôme de degré 2** ou **fonction trinôme**.

Propriété

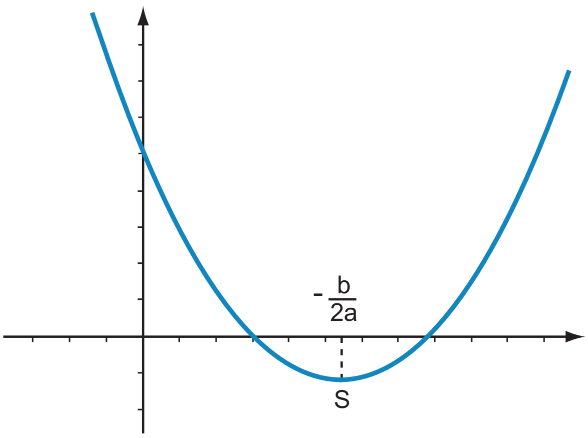
La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole qui a l'allure suivante :

Si $a > 0$

f est décroissante puis croissante.

La parabole admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.

Allure :



Le point d'intersection de la parabole avec son axe de symétrie est le **sommet de la parabole**.

Le sommet de la parabole a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$;

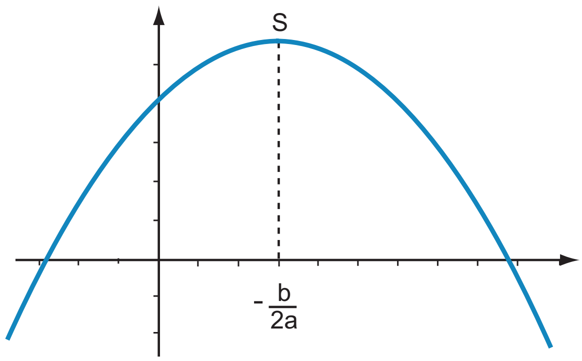
f atteint un minimum en ce point qui vaut $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$

f est croissante puis décroissante.

La parabole admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.

Allure :



Le point d'intersection de la parabole avec son axe de symétrie est le **sommet de la parabole**.

Le sommet de la parabole a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$;

f atteint un maximum en ce point qui vaut $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
variation de f		↘	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↗	

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
variation de f		↗	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	↘	

B Résoudre une équation

▶ **Exemple**

a) Equation du 1er degré

Résoudre :

❶ $3x-4=0$

❷ $-2x+5=4$

▶ **Solution**

❶ $3x-4=0$

$3x=4$

$x=\dfrac{4}{3}$

$S=\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

❷ $-2x+5=4$

$-2x=4-5$

$-2x=-1$

$x=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$

$S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

b) Equation produit

Résoudre : $(2x + 3)(-4x + 7)=0$

▶ **Solution**

$(2x+3)(-4x+7)=0$

$2x+3=0$ ou $-4x+7=0$

$2x=-3$ ou $-4x=-7$

$x=\dfrac{-3}{2}$ ou $x=\dfrac{-7}{-4}=\dfrac{7}{4}$

$S=\left\{\dfrac{-3}{2}\,;\,\dfrac{7}{4}\right\}$

c) Quelques équations du second degré

Résoudre :

❶ $3x^2-4x=0$

❷ $x^2-25=0$

▶ Solution

❶ $3x^2-4x=0$

$x(3x-4)=0$

$x=0$ ou $3x-4=0$

$x=0$ ou $x=\dfrac{4}{3}$

$S=\left\{0\ ;\ \dfrac{4}{3}\right\}$

❷ $x^2-25=0$

$x^2-5^2=0$

$(x-5)(x+5)=0$

$x-5=0$ ou $x+5=0$

$x=5$ ou $x=-5$

$S=\{5\ ;-5\}$

2 Différentes formes d'une fonction polynôme de degré 2

A Activité

Activité 1 Étude d'un exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+5x-3$ (*)

1. Déterminer une nouvelle écriture de f

Factorisons :

$$2x^2+5x-3=2\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$$

$$=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{3}{2}\right)$$

$$=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-\frac{24}{16}\right)$$

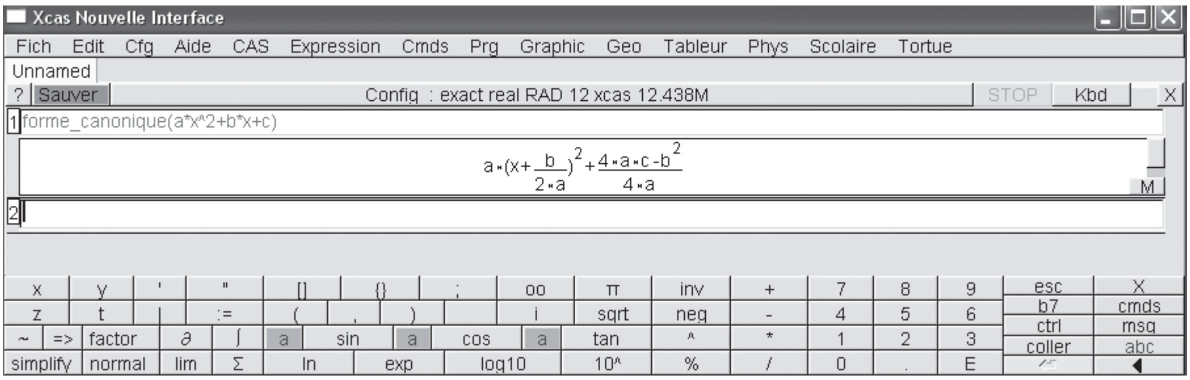
$$=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right)$$

$$=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{49}{8}\ (**)$$

Regardons $x^2+\frac{5}{2}x$ comme le début du développement d'un carré $(x+...)^2$

Remarque

Ce résultat peut être obtenu avec la fonction forme_canonique du logiciel Xcas :



(*) est la forme développée de f

(**) est la forme canonique de f (x n'apparaît qu'une seule fois dans l'expression).

② Calculer : $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$

$\alpha = \dfrac{-5}{2\times 2}$ et $\beta = \dfrac{-5^2+4\times 2\times(-3)}{4\times 2}$

$\alpha = \dfrac{-5}{4}$ et $\beta = \dfrac{-49}{8}$

③ Montrer que f admet un minimum en $x = \dfrac{-5}{4}$ et donner la valeur de ce minimum.

$f(x) - f\left(\dfrac{-5}{4}\right) = 2(x - \dfrac{5}{4})^2 - \dfrac{49}{8} + \dfrac{49}{8}$

$f(x) - f\left(\dfrac{-5}{4}\right) = 2(x - \dfrac{5}{4})^2$

Comme $2 > 0$ et, pour $x \neq \dfrac{-5}{4}$, $\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 > 0$, on a

Pour $x \neq \dfrac{-5}{4}, f(x) - f\left(\dfrac{-5}{4}\right) > 0$ soit $f(x) > f\left(\dfrac{-5}{4}\right)$

f admet un minimum en $x = \dfrac{-5}{4}$ qui vaut $f\left(\dfrac{-5}{4}\right) = \dfrac{-49}{8}$

Ceci correspond au sommet $S\left(\dfrac{-5}{4};\dfrac{-49}{8}\right)$ de la parabole.

④ Conclusion : Dans cet exemple, la forme canonique de f est donnée par :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$

Ce résultat se généralise à toute fonction polynôme de degré 2.

B Cours

① Forme développée et forme canonique

Théorème 1

Toute fonction trinôme f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ s'écrit sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ est la **forme développée** de f.

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la **forme canonique** de f.

Démonstration

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$

$$\begin{aligned}f(x)&=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c\\&=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2\right)+c\\&=a\left((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c\\&=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c\\&=a(x+\frac{b}{2a})^2+\left(\frac{-b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}\right)\\&=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}\end{aligned}$$

Posons $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=\dfrac{-b^2+4ac}{4a}$, on a bien $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

❷ Sommet de la parabole

Théorème 2

Avec les notations du théorème 1 : La parabole associée à f admet pour sommet le point S de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$

Remarque

$f(\alpha)=\beta$

Démonstration

$f(\alpha)=a(0)^2+\beta=\beta$

Montrons que f réalise un extremum en α :

$$\begin{aligned}f(x)-f(\alpha)&=a(x-\alpha)^2+\beta-\beta\\&=a(x-\alpha)^2\end{aligned}$$

Si $a>0$

Pour $x\neq\alpha, (x-\alpha)^2>0$

Ainsi, $a(x-\alpha)^2>0$ et $f(x)-f(\alpha)>0$

f réalise un minimum en α qui vaut $f(\alpha)$.

Si $a<0$

Pour $x\neq\alpha, (x-\alpha)^2>0$

Ainsi, $a(x-\alpha)^2<0$ et $f(x)-f(\alpha)<0$

f réalise un maximum en α qui vaut $f(\alpha)$.

C Exercices d'apprentissage

Exercice 1 Soit $f(x)=3x^2-30x+83$ et $g(x)=-x^2-8x-15$

a) Déterminer les coefficients a, b et c du trinôme ax^2+bx+c associés aux fonctions f et g.

b) Vérifier que $f(x)=3(x-5)^2+8$ et $g(x)=-(x+4)^2+1$.

c) Donner les coordonnées du sommet de la parabole associée à f puis à g.

Exercice 2 Soit $f(x)=3(x+7)^2-2$ et $g(x)=-2(x+4)^2+5$

a) Déterminer la forme développée de f puis de g.

b) Donner le tableau de variations de f puis de g.

c) Donner les coordonnées du sommet de la parabole associée à f puis à g.

Exercice 3 Soit $f(x)=2x^2-8x+8$

Donner le tableau de variations de f

Exercice 4 Soit $f(x)=2x^2+3x+1$

a) A l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations de f.

b) Donner le tableau de variations de f.

Exercice 5 On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=(x+3)^2-25$ (*Forme A*).

❶ Vérifier que f peut aussi s'écrire sous la forme

a) $f(x)=x^2+6x-16$ (*Forme B*).

b) $f(x)=(x-2)(x+8)$ (*Forme C*).

❷ a) Mettre une croix dans la case correspondant à la forme la plus adaptée pour calculer $f(0)$; $f(-3)$ et $f(2)$.

	Forme A	Forme B	Forme C
$f(0)$			
$f(-3)$			
$f(2)$			

b) Effectuer les calculs.

❸ a) Mettre une croix dans la case correspondant à la forme la plus adaptée pour résoudre $f(x)=0$; $f(x)=11$ et $f(x)=-16$

	Forme A	Forme B	Forme C
$f(x)=0$			
$f(x)=11$			
$f(x)=-16$			

b) Résoudre ces équations.

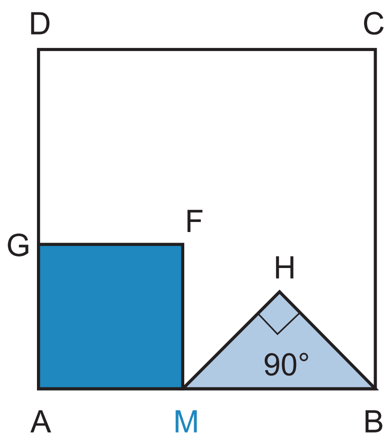
Exercice 6

Un carré ABCD a un côté de longueur 4. M est un point du segment [AB].

On dessine dans le carré un carré de côté [AM] et un triangle isocèle rectangle de base [MB].

On s'intéresse à l'aire du motif constitué par le carré et le triangle.

On note x la longueur AM.



a) Modéliser cette situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (par exemple Geogeba). *M sera un point mobile du segment [AB].*

Conjecturer s'il est possible de rendre l'aire du motif minimale ? Si oui, dans quel(s) cas ?

Utiliser la fonctionnalité « Aire » ou le tableur de Geogebra.

b) Démontrer ce résultat :

1. Exprimer la longueur MB en fonction de x.
2. Déterminer l'aire du motif constitué par le carré et le triangle.
3. Démontrer la conjecture.

3 Équation du second degré

A Activité

Activité 2

Conjecture du nombre de solution(s) d'une équation du type $ax^2+bx+c=0$

Soient les fonctions f, g, h, i, j et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=2x^2-5x-3$

$g(x)=x^2+x+1$

$h(x)=9x^2-12x+4$

$i(x)=-3x^2+6x+72$

$j(x)=-x^2-2x-1$

$k(x)=6x^2+20x+20$

1. On rappelle que, pour une fonction polynôme de degré 2, $f(x)=ax^2+bx+c$, $-\beta=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Pour chacune des fonctions précédentes, calculer le nombre $\Delta=b^2-4ac$ appelé **discriminant** du trinôme (lié au numérateur de β) ; l'indiquer dans le tableau ci-dessous :

Fonctions	f	g	h	i	j	k
$\Delta=b^2-4ac$						

2. *Indiquer les réponses dans le tableau ci-dessous.*

a) Pour chacune des fonctions précédentes, indiquer le signe de Δ .

b) Représenter les fonctions f, g, h, i, j et k sur l'écran de votre calculatrice puis :

– Conjecturer l'existence de solutions aux équations :
$f(x)=0$; $g(x)=0$; $h(x)=0$; $i(x)=0$; $j(x)=0$; $k(x)=0$.

– Dans le cas où des solutions existent, indiquer leur nombre.

Fonctions	f	g	h	i	j	k
Signe de Δ (+ ; – ou 0)						
Existence de solution(s) (oui ou non)						
Si oui, nombre de solution(s)						

Émettre une conjecture liant le signe du discriminant Δ et le nombre de solutions des équations du type $f(x)=0$.

B Cours

❶ Discriminant

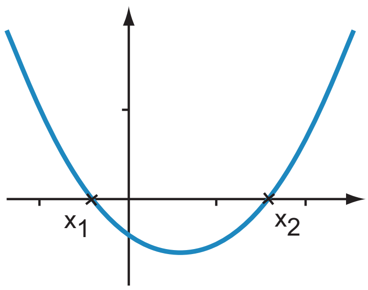
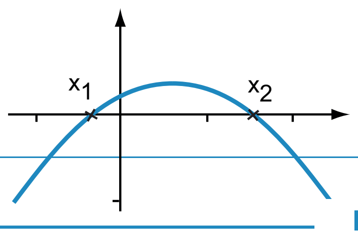
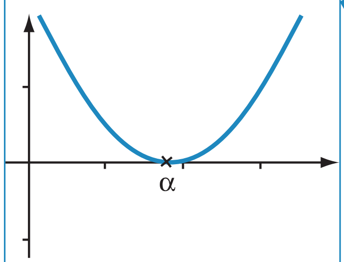
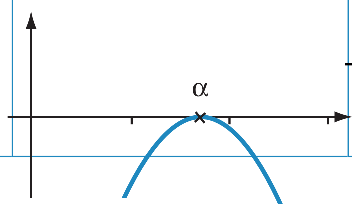
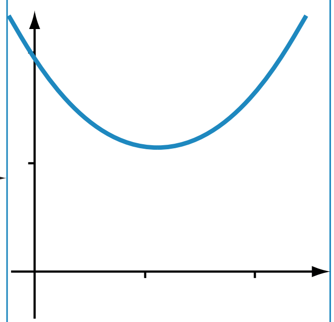
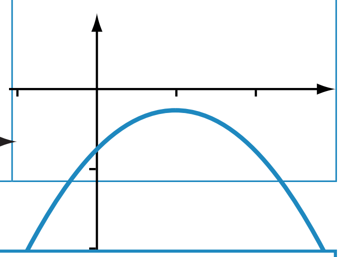
Définition

Soit f une fonction trinôme définie par $f(x)=ax^2+bx+c$.

b^2-4ac est appelé **discriminant** du trinôme ax^2+bx+c. On le note Δ.

❷ Théorème

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et forme factorisée.

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Solutions	2 solutions : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	1 solution double : $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$	Pas de solutions dans $\mathbb{R}$
Forme factorisée	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-\alpha)^2$	Pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
Allure graphique	Deux points d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses  ou 	Un point d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses  ou 	Pas de point d'intersection entre la parabole et l'axe des abscisses  ou 

Remarque

Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont aussi appelées racines de ax^2+bx+c.

Démonstration

Dans le chapitre 2, on a vu que $f(x)=ax^2+bx+c$ pouvait s'écrire sous la forme $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$.

On a donc $f(x)=a(x-\alpha)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$ soit $f(x)=a\left[(x-\alpha)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ avec $a\neq 0$.

▸ Si $\Delta>0$ alors $\Delta=(\sqrt{\Delta})^2$

$$\begin{aligned}f(x)&=a\left[(x-\alpha)^2-\frac{(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}\right]\\&=a\left[(x-\alpha)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]\\&=a\left(x-\alpha-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\alpha+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\&=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\end{aligned}$$

l'équation $f(x)=0$ admet pour solutions $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

f se factorise sous la forme : $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

▸ Si $\Delta=0$,

Alors $f(x)=a(x-\alpha)^2$: l'équation $f(x)=0$ admet pour solution double la valeur α et f se factorise sous la forme $f(x)=a(x-\alpha)^2$.

▸ Si $\Delta<0$,

alors $-\dfrac{\Delta}{4a}>0$ donc $(x-\alpha)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$: l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on ne peut pas factoriser f.

▸ Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-5x-3=0$

▸ Solution On calcule le discriminant Δ :

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=(-5)^2-4\times2\times(-3)\qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7\\&=25+24\\&=49\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc cette équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{5+7}{2\times 2} \quad \text{et} \quad = \frac{5-7}{2\times 2}$$
$$= \frac{12}{4} = 3 \qquad = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$S = \left\{\frac{-1}{2}\,;3\right\}$$

▶ Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$

▶ Solution On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 1^2 - 4\times 1\times 1$$
$$= 1 - 4$$
$$= -3$$

$\Delta < 0$ donc cette équation n'admet pas de solution.

▶ Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $9x^2 - 12x + 4 = 0$

▶ Solution On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-12)^2 - 4\times 9\times 4$$
$$= 144 - 144$$
$$= 0$$

$\Delta = 0$ donc cette équation admet une solution double :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2\times 9} \qquad \alpha = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

C Algorithme

L'algorithme qui suit calcule le discriminant Δ du trinôme ax^2+bx+c et indique le nombre de solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$

1 Langage « naturel »

Entrées : a,b et c (coefficients du trinôme ax^2+bx+c)

Traitement :

– « Δ = »

Mettre b^2-4ac dans Δ

Afficher Δ

– « Nombre de solutions : »

Si $\Delta>0$ alors afficher « 2 solutions »

Si $\Delta=0$ alors afficher « 1 solution »

Sinon afficher « pas de solution »

FinSi

Fin de l'algorithme

Remarque

On peut remplacer le « sinon » $\Delta<0$

2 Langage « calculatrice »

Texas Instrument

```
PROGRAM:SECONDD
:Input "A?",A
:Input "B?",B
:Input "C?",C
:B²-4AC→D
:Disp "DELTA=",D

:If D>0

:Then
:Disp "2 SOLUTIO
NS"
:Else
:If D=0
:Then
:█isp "1 SOLUTIO

:Then
:Disp "1 SOLUTIO
N"
:Else
:Disp "0 SOLUTIO
N"
:
```

Casio

```
======SECOND D ======
"A"?→A↵
"B"?→B↵
"C"?→C↵
"DELTA"↵
B²-4AC→D◢
If D>0↵

Then "2 SOLUTIONS"↵
Else If D=0↵
Then "1 SOLUTION"↵
Else "0 SOLUTION"↵
IfEnd↵
```

D Exercices d'apprentissage

Exercice 7 Dans chacun des cas suivants, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ et, si possible, factoriser $f(x)$

a) $f(x)=-0{,}5x^2+2{,}5x+3$

b) $f(x)=-2x^2+12x-18$

c) $f(x)=-0{,}5x^2+3x-9{,}5$

d) $f(x)=5x^2+12x+3$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le calcul du discriminant

a) $x^2-25=0$

b) $3x^2+4x=0$

c) $x^2+7=0$

d) $x^2-2x+1=0$

e) $9x^2-4=0$

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $3x^2+5x=2x^2-2x+4$

b) $(2x+4)^2=3x+5$

Exercice 10 ❶ Ecrire, en « langage naturel », un algorithme qui permet de :

– calculer le discriminant Δ associé au trinôme ax^2+bx+c

– donner les valeurs des solutions éventuelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$; indiquer « pas de solution » lorsqu'il n'y en a pas.

❷ Programmer cet algorithme sur la calculatrice ou un logiciel.

❸ Tester cet algorithme avec les équations de l'exercice 7.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 9x + 360$ et représentée graphiquement par la parabole P.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P avec l'axe des abscisses.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 22x + 125$ et représentée graphiquement par la parabole P.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P avec la droite d'équation $y = 5$.

Exercice 13

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 3x + 2$ et $g(x) = 5x^2 + 2x + 1$ et représentées graphiquement par les paraboles P_f et P_g respectivement.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P_f et P_g.

Exercice 14

Offre et demande

Les fonctions d'offre et de demande de la pomme de terre sur les marchés, exprimées en € par tonne, sont données par :

$$O(q) = 2q^2 + 1{,}5q + 17 \text{ et } D(q) = q^2 - 20q + 110, \text{ pour } q < 10.$$

où q désigne la masse de pomme de terre exprimée en tonne.

1 a) Pour quelle masse l'offre est-elle de 43 € ?

b) Pour quelle masse la demande est-elle de 26 € ?

2 a) Dresser le tableau de variation des fonctions offre et demande sur l'intervalle [1 ; 10].

b) Représenter ces deux fonctions dans un même repère.

Unités : en abscisse, 2 cm pour une unité ; en ordonnée, 1 cm pour 10 unités.

3 a) Résoudre graphiquement l'équation $O(q) = D(q)$.

La solution de cette équation est appelée **quantité d'équilibre du marché**.

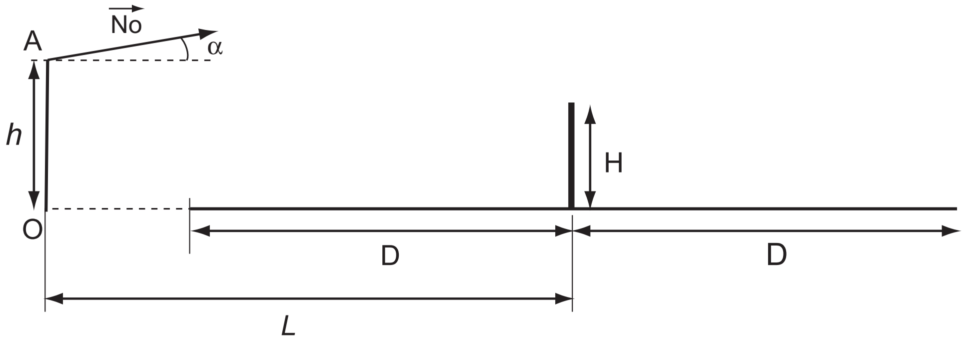
b) Par un calcul, déterminer la valeur exacte puis la valeur approchée à 0,01 tonne près de la quantité d'équilibre du marché. Quel est alors le prix d'équilibre du marché, arrondi au centime près ?

Exercice 15

Une partie de volley

Dans tout l'exercice, on assimilera la balle à un point matériel. On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.

Au volley-ball, le joueur qui effectue le service frappe la balle à la hauteur h du sol et à la distance L du filet (voir figure ci-dessous).



La hauteur du filet est $H = 2{,}43$ m. La ligne de fond du camp adverse est à $D = 9$ m du filet. Pour que le service soit bon, il faut que la balle passe au-dessus du filet et touche le sol dans le camp adverse entre le filet et la ligne de fond. Pour simplifier, on supposera que la trajectoire de la balle est située dans le plan de figure (orthogonal au filet) et on négligera la résistance de l'air. Dans cet exercice, nous allons étudier le service. Pour cela, le joueur placé en O saute verticalement et frappe la balle en A pour lequel $h = 3{,}5$ m et $L = 12$ m. Le vecteur vitesse initiale de la balle $\overrightarrow{v_0}$ fait un angle $\alpha = 7°$ vers le haut avec l'horizontale (voir figure) et a pour norme $v_0 = 18\ m.s^{-1}$.

D'après les lois de la physique, la trajectoire de la balle est régie par l'équation :

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2(\cos(\alpha))^2}x^2 + \tan(\alpha) \times x + h.$$

1. La balle passe-t-elle au-dessus du filet ?

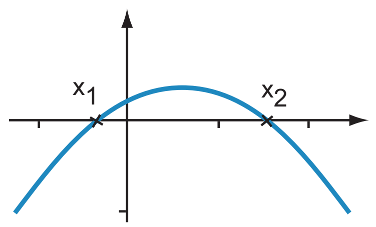
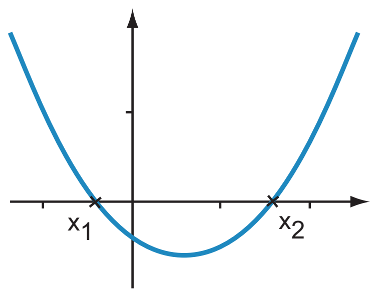
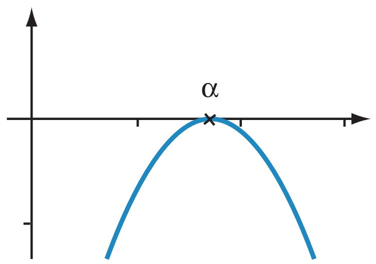
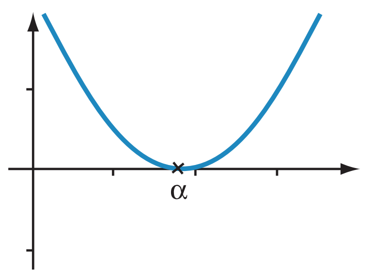
2. Si elle n'est pas interceptée, à quelle distance de O se trouve la balle lorsqu'elle touche le sol ? Le service est-il bon ?

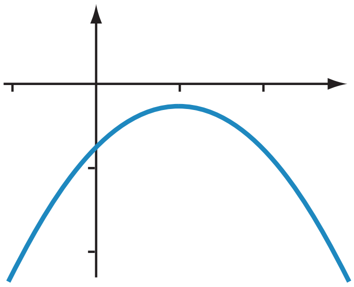
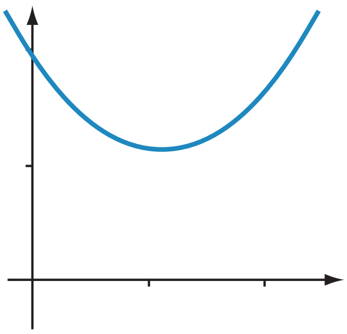
4 Signe du trinôme

A Conjecturer le signe d'un trinôme

Activité 3 Soit P la parabole représentée dans le repère ci-dessous et associée à la fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

À partir du graphique, compléter le tableau suivant :

Graphique	P coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, quel est le nombre de point(s) d'intersection ?	Signe de a	Signe de Δ	Tableau de signe
	Oui 2 points d'intersection	$a < 0$	$\Delta > 0$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline \text{signe de } f & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$
				
				
				

Ce tableau résume les différents cas de figure pour l'étude du signe de f .

Il dépend :

– de l'existence de solution à l'équation $f(x)=0$

– du nombre de solution

– de l'orientation de la parabole i.e. du signe de a .

Le théorème qui suit résume ces différentes situations.

B Cours

1 Signe du trinôme

Remarque

On peut retenir que le trinôme du second degré ax^2+bx+c avec $a \neq 0$ est du signe de a sauf entre les racines, si elles existent.

Théorème 4

Signe de $f(x)=ax^2+bx+c$

- si $\Delta<0$, f est de signe constant, celui de a .
- si $\Delta=0$, f est de signe constant, celui de a , sauf en la racine $\dfrac{-b}{2a}$ où f s'annule.
- si $\Delta>0$, f s'annule en les racines x_1 et x_2 , est du signe de a sur $]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$ et est du signe contraire de a sur $]x_1;x_2[$.

❷ Exemple

▸ Exemple Dresser le tableau de signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+3x-1$

▸ Solution On calcule le discriminant Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 3^2-4\times(-2)\times(-1)\\ &= 9-8\\ &= 1\end{aligned} \qquad \sqrt{\Delta}=\sqrt{1}=1$$

$\Delta>0$ donc f a deux racines distinctes :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-3+1}{2\times(-2)}\\ &= \frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}\end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{-3-1}{2\times(-2)}\\ &= \frac{-4}{-4}=1\end{aligned}$$

a = –2 < 0

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
signe de f		$-$	0	$+$	0	$-$	

C Exercices d'apprentissage

Exercice 16 Étudier le tableau de signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

a) $f(x)=2x^2+3x+1$

b) $f(x)=x^2+3x+4$

c) $f(x)=-2x^2+12x-18$

Exercice 17

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x^2 - 3x + 4 \geq 0$

b) $-3x^2 + 30x - 75 < 0$

c) $7x^2 + 2x - 4 < 0$

Exercice 18

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x^2 - 3x + 4 \geq 5x + 6$

b) $-x^2 + 8x - 7 > 3x^2 + 1$

Exercice 19

Une entreprise fabrique et commercialise des bâches carrées destinées aux voiles de bateau. La taille maximale d'une bâche produite par l'usine est 30 m de côté.

On note x la dimension du côté d'une bâche. Le coût de production C, exprimé euros, pour fabriquer une bâche de x mètres de côté est donné par $C(x) = x^2 + 200$.

On note R la recette et B le bénéfice, exprimés euros, réalisés par la vente d'une bâche de x mètre de côté.

a) Une bâche d'un mètre carré est vendue 34 €. Sachant que le prix de vente est proportionnel à la longueur du côté de la bâche, donner une expression de R en fonction de x.
En déduire B.

b) Dresser le tableau de variation de B. En déduire pour quelle valeur de x le bénéfice réalisé est maximal.

c) Pour quelles valeurs de x le bénéfice est-il nul ?

5 Synthèse du cours

1 Fonction polynôme de degré 2

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une fonction **polynôme de degré 2** ou **fonction trinôme**.

Sa courbe représentative est une **parabole**.

Son tableau de variation est le suivant :

Si a > 0

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
variation de f	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

Si a < 0

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
variation de f	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

2 Discriminant

$ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est appelé trinôme

$\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme

3 Solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et signe du trinôme

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions	2 solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	1 solution double : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$
Forme factorisée	$a(x-x_1)(x-x_2)$	$a(x-\alpha)^2$	Pas de factorisation dans $\mathbb{R}$
Signe	Celui de a à l'extérieur des racines Celui de $-a$ entre les racines	Celui de a	Celui de a

6 Exercices d'approfondissement

Exercice I

❶ Déterminer la fonction trinôme f dont les racines sont -2 et 3 et telle que $f(0)=-30$.

Exercice II

Donner l'allure de la représentation graphique d'une fonction trinôme f qui vérifie les conditions suivantes :

- f a deux racines négatives
- f est de signe positif entre les racines

Exercice III

Une personne dépose chaque année sur son compte 1000 €, ce compte étant rémunéré à taux fixe et à intérêts composés (les intérêts s'ajoutent au capital à la fin de chaque année).

Au bout de deux ans le capital disponible est de 3209,60 €. A combien a-t-il placé son argent ?

Exercice IV

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation (E) $x^4-5x^2+6=0$

Cette équation n'est pas du second degré mais on peut s'y ramener en effectuant un changement d'inconnue :

Posons $X=x^2$.

a) Que vaut X^2 ?

b) Remplacer x par X dans l'équation (E) pour obtenir une équation (E').

c) Résoudre l'équation (E').

d) Pour chaque solution X de l'équation (E'), déterminer les valeurs de x correspondantes.

Exercice V

Etudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,5\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{2x+5}$