Séquence 2

Graphes
Premières applications

Sommaire

Objectifs

- Représenter symboliquement une situation concrète pour se ramener à l'étude de sommets et d'arêtes (ou d'arcs) d'un graphe.
- Donner des exemples de modélisation de problèmes concrets.
- Résoudre quelques problèmes concrets après les avoir modélisés.

1 Pré-requis

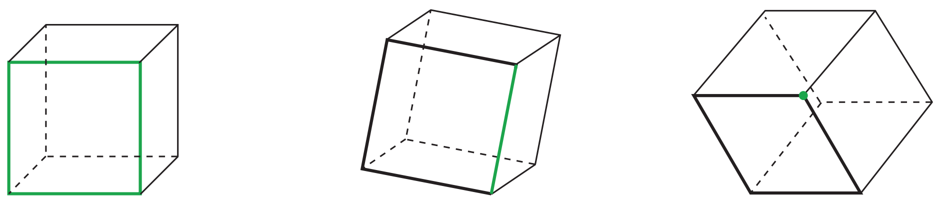
A Représentations d'un cube en 3D et en 2D

1. Représentations d'un cube en perspective cavalière (3D)

La perspective cavalière conserve le parallélisme : ainsi des droites parallèles dans le **cube réel** sont représentées sur la feuille par des droites parallèles.

Considérons un cube non évidé (en bois plein par exemple).

Suivant l'élément frontal considéré (face – arête – sommet) on peut obtenir l'une ou l'autre des 3 représentations de la **figure 1**.



Face frontale 1.a — Arête frontale 1.b — Sommet frontal 1.c

Figure 1

2. Représentation plane d'un cube (2D)

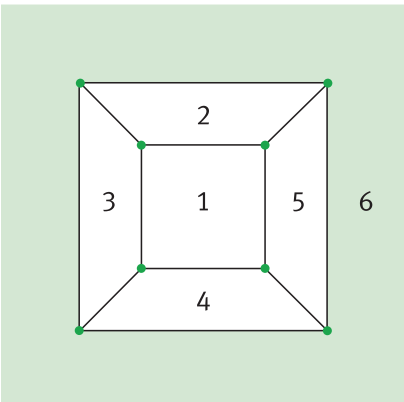


Figure 2

Un cube en mode "fil de fer" correspond, dans l'espace, aux trois cubes de la **figure 1** où les 12 arêtes seraient visibles.

Si on se place assez près d'une face d'un cube en mode "fil de fer" on peut observer le schéma de la **figure 2**.

On peut imaginer que cette **figure 2** donne une **représentation plane** du "squelette" d'un cube construit à partir de 12 tiges métalliques de même longueur soudées entre elles à chacun des sommets.

Un cube possède : 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces.

Sur la **figure 2** les arêtes ne se croisent pas.

Les **faces** sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. La face 6 est l'extérieur du grand carré (ici la face infinie est en couleur).

- L'extérieur est une **face** : c'est une région du plan délimitée partiellement par des arêtes.

Exercice — Tétraèdre et perspective

1) Représenter deux perspectives cavalières d'un tétraèdre : face frontale, puis arête frontale.

2) Représenter le "squelette" de ce tétraèdre constitué de 4 tiges métalliques de même longueur soudées entre elles à chacun des sommets (les 4 segments ne doivent pas se couper).

3) On désigne par s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces.

Remplir le tableau

	Cube	Tétraèdre
s		
a		
f		
$s-a+f$		

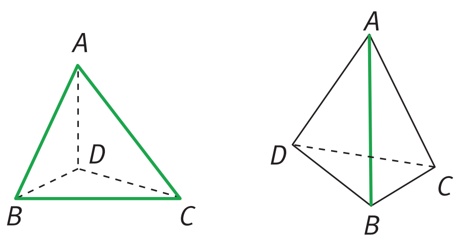
$\underbrace{\downarrow \qquad \downarrow}$

Que remarque-t-on ?

Solution

❶ Perspectives cavalières du tétraèdre : voir **figures 3.a** et **3.b**.

❷ Squelette du tétraèdre : voir **figure 4**. La face BCD se retrouve à l'extérieur du triangle BCD et est coloriée.



Face frontale
3.a

Arête frontale
3.b

Figure 3

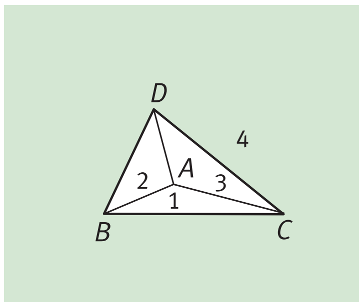


Figure 4

4 faces	**1**	ABC
	2	ABD
	3	ACD
	4	BCD (infinie)

3

	Cube	Tétraèdre
s	8	4
a	12	6
f	6	4
$s-a+f$	2	2

Dans les deux cas on a : $\boldsymbol{s-a+f=2}$.

Cette formule est la **formule d'Euler.**

B Puissances d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Pour p entier et $p \geq 1$, $A^p = \underbrace{A \times \ldots\ldots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Exercice **Matrices booléennes**

On donne $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Déterminer les matrices A^2, A^3, B^2, B^3, B^4.

Solution Les calculs demandés sont effectués à la calculatrice.

Pour les puissances de A on obtient :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pour les puissances de B on obtient :

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Remarques

Les matrices A et B sont dites **booléennes*** car elles ne contiennent que des 0 et des 1.

Les matrices A et B sont des matrices **symétriques** car chacune d'elles est égale à sa transposée.

*booléen(ne) : vient du nom du mathématicien anglais Georges Boole (1815 – 1864).

2 Notion de graphe

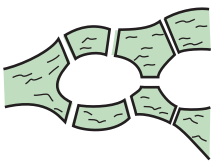
A Objectifs du chapitre

- Représenter une situation par un graphe.
- Introduire le vocabulaire de base des graphes.
- Reconnaître un graphe eulérien.

B Pour débuter

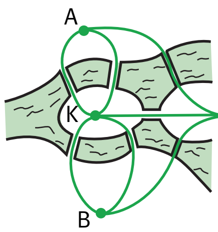
Activité 1 Les sept ponts de Königsberg

Au XVIII^{e} siècle les habitants de Königsberg aimaient se promener le dimanche et traverser les différents ponts de leur ville. Ils se demandaient s'il leur était possible de parcourir la ville en empruntant chacun des 7 ponts une fois et une seule.



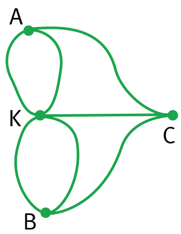
Königsberg
La Pregel-Les 7 ponts
L'île de Kneiphof

5.a



Les 7 trajets possibles

5.b



Le graphe :
4 sommets
7 arêtes

5.c

Carte parue dans « Le Journal »
Dimanche 17 novembre 1918

Figure 5

Un promeneur veut traverser, une fois et une seule, chacun des sept ponts de la ville.

❶ Peut-il trouver un itinéraire tel que la région d'arrivée soit la même que celle de départ ?

❷ Peut-il trouver un itinéraire tel que les régions d'arrivée et de départ soient distinctes ?

Activité 2 Cavaliers sur un échiquier 3×3

Dans le jeu d'échecs la pièce dont le déplacement est le plus compliqué est le cavalier. Les possibilités de déplacement d'un cavalier sur un échiquier sont indiquées sur la **figure 6**.

On considère maintenant le mini échiquier 3×3 de la **figure 7** où sont placés deux cavaliers blancs et deux cavaliers en couleur.

Est-il possible de permuter les deux cavaliers blancs et les deux cavaliers en couleur ?

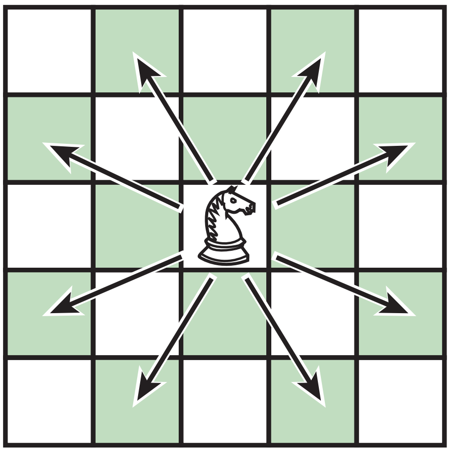


Figure 6

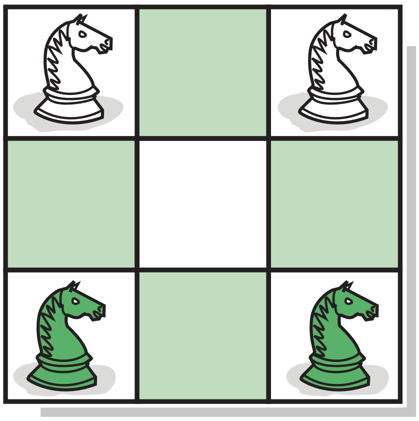


Figure 7

Activité 3 Le problème du voyageur de commerce (en abrégé : PVC)

Un dodécaèdre régulier est un solide dont les 12 faces sont des pentagones réguliers et tel qu'en chacun des 20 sommets trois arêtes se rencontrent (voir **figure 8**).

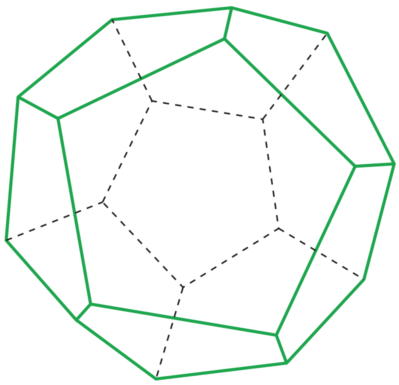


Figure 8

Vers 1859 William Hamilton imagina de placer (symboliquement) une ville à chacun des sommets d'un dodécaèdre.

Il se demanda ainsi, un peu sous forme de jeu, s'il était possible pour un voyageur de commerce de visiter, une fois et une seule, vingt villes réparties à la surface du globe et de revenir dans la ville de départ.

Pensez-vous que le problème du voyageur de commerce admette une solution ?

Si oui, trouver un parcours possible sur une représentation plane du "squelette" d'un dodécaèdre où les arêtes ne se coupent pas.

Activité 4 **Accès codés par des chiffres**

Un professeur de mathématiques désire donner à chacun de ses trente et un élèves de terminale ES, ainsi qu'à lui-même, un code d'accès pour la salle informatique. Les codes doivent être tous différents et obtenus à partir du graphe étiqueté de la **figure 9**.

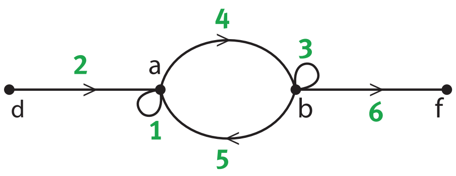


Figure 9

Un nombre est accepté comme code d'accès si c'est une liste de chiffres commençant par 2 et se terminant par 6, associée à un chemin du graphe. De plus le nombre obtenu doit être divisible par trois.

▶ Dans cette activité, seuls les nombres nous intéressent.

Les lettres *d*, *a*, *b*, *f* seront utilisées dans l'exercice d'apprentissage 10.

1. Quel est le plus petit code possible ?
2. Trouver tous les codes formés, au maximum, de 6 chiffres.
3. Le professeur pourra-t-il donner autant de codes différents qu'il le souhaite (on ne demande pas de les trouver tous …) ?

C Cours

1. Aperçu historique

▶ Les sept ponts de Königsberg

La ville de Königsberg, appelée Kaliningrad depuis 1946, est située dans une enclave russe au bord de la mer baltique (autrefois en Prusse orientale). Cette enclave est entourée à l'est et au nord par la Lituanie et au sud par la Pologne (voir carte datant de 1918).

C'est en 1736 que le mathématicien suisse Léonhard EULER (1707 – 1783) a résolu le problème des ponts de Königsberg. On considère généralement que la théorie des graphes a eu comme point de départ la résolution de ce problème par Euler.

Si la ville de Königsberg est célèbre pour ses ponts on peut aussi citer quelques hommes célèbres qui y sont nés : le philosophe Kant (1724 – 1804), le physicien Kirchhoff (1824 – 1887) et le mathématicien Hilbert (1862 – 1943).

▶ Le problème du voyageur de commerce

Le mathématicien irlandais William Hamilton (1805 – 1865) imagina de placer les vingt villes aux sommets d'un dodécaèdre régulier (solide ayant 12 faces pentagonales, 20 sommets et 30 arêtes) modélisé par un graphe. Un cycle qui passe par les 20 sommets de ce graphe est appelé *cycle hamiltonien*.

▶ Le parcours du cavalier sur un échiquier.

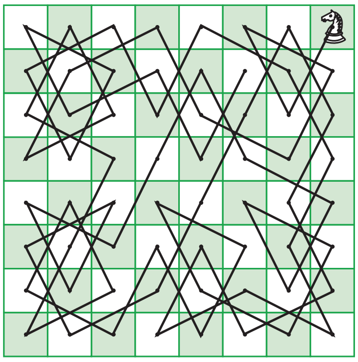
On s'intéresse au parcours d'un cavalier sur un échiquier 8×8. Le cavalier peut-il visiter toutes les cases de l'échiquier une fois et une seule et revenir ensuite à la case de départ ?

Oui, c'est possible. Les échiquiers de la **figure 10** montrent trois parcours possibles.

La plus ancienne solution connue est celle d'AL-Adli-ar-Rumi (vers 840).

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	**64**	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Solution d'Euler en 1759



Solution d'Al-Adli-ar-Rumi

31	54	47	8	33	10	27	50
46	7	32	53	28	49	34	11
5	30	55	48	9	36	51	26
56	45	6	29	52	25	12	35
43	4	57	20	61	14	37	24
58	19	44	**1**	40	23	62	13
3	42	17	60	21	**64**	15	38
18	59	2	41	16	39	22	63

Solution : carré «semi-magique»

Figure 10

Remarques

- Le dernier carré est "semi-magique" car seule la somme des 8 lignes et des 8 colonnes est égale à 260.
- La somme des diagonales n'est pas égale à 260.

2. Un peu de vocabulaire

* Il semble que ce soit le mathématicien James Sylvester (1814 – 1897) qui ait introduit le premier le mot graphe, vers 1880.

Les activités précédentes ont été résolues de manière analogue : à chaque fois une solution graphique a été donnée. Chacune des représentations graphiques données est formée de points reliés par des lignes : ce type de graphique est un **graphe***.

Définition 1

- Un **graphe** est un ensemble de points éventuellement reliés par des lignes.
- Un graphe peut être **non orienté** (voir activités 1, 2, 3) ou **orienté** (voir activité 4).
- Les points sont les **sommets** du graphe.
- Les lignes sont appelées
  - **arêtes** pour un graphe non orienté;
  - **arcs** pour un graphe orienté.
- Un **arc** est une arête orientée : il possède une extrémité initiale (ou origine) et une extrémité terminale.
- Une **boucle** est une arête (ou un arc) dont les extrémités sont confondues.
- Deux sommets sont **adjacents** (ou **voisins**) s'ils sont reliés par une arête (ou un arc).
- Un **sommet pendant** est un sommet qui n'a qu'un seul voisin.
- Un **sommet isolé** est un sommet qui n'est relié à aucun autre.
- Si deux sommets sont reliés par plusieurs arêtes chacune est une **arête multiple** (le graphe des ponts de Königsberg possède 4 arêtes multiples).

Exemple 1

- Un graphe non orienté peut admettre des boucles.

  Les sommets A et B sont adjacents.

Les sommets A et C ne sont pas adjacents.

Le sommet D est un sommet isolé.

Les sommets A et C sont des sommets pendants.

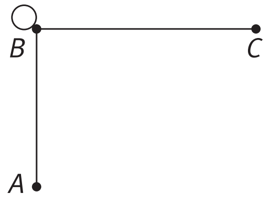


Figure 11.a

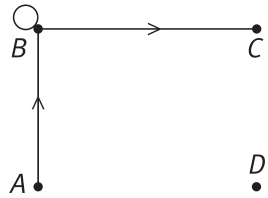


Figure 11.b

Définition 2

- L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes (ou d'arcs) ayant ce sommet pour extrémité.

Exemple 2 On reprend les deux graphes de la **figure 11**.

Déterminer l'ordre de chacun des deux graphes ainsi que le degré de chacun des sommets.

Comparer le nombre d'arêtes et la somme des degrés.

	Figure 11.a			Figure 11.b			
Ordre	3			4			
Sommets	A	B	C	A	B	C	D
Degré	1	4	1	1	4	1	0

	Figure 11.a	Figure 11.b
a = nombre d'arêtes	3	3
d = somme des degrés	6	6
Relation entre d et a.	$d = 2a$	$d = 2a$

La relation obtenue entre a et d dans l'exemple 2 est un résultat vrai pour tous les graphes. Une arête (ou un arc) qui relie deux sommets distincts augmente le degré de chacun des sommets de 1. Chaque arête, chaque arc (et éventuellement chaque boucle) augmente la somme des degrés de 2.

Propriété 1

- La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes :

$$\underbrace{d}_{\text{Somme degrés}} = 2 \times \underbrace{a}_{\text{nombre arêtes}}$$

- La **somme des degrés** de tous les sommets d'un graphe est toujours un **nombre pair**.

On peut en déduire la propriété suivante :

Propriété 2

- Dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est un nombre pair.

Démonstration

$$\underbrace{\boxed{\text{Somme des degrés}}}_{\text{nombre pair}} = \underbrace{\boxed{\text{Somme des degrés des sommets pairs}}}_{\text{nombre pair}} + \underbrace{\boxed{\text{Somme des degrés des sommets impairs}}}_{\text{nombre pair}}$$

Donnons une application un peu inattendue de cette propriété. Dans une réunion où beaucoup de poignées de main sont échangées, le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est un nombre pair.

Définition 3

On considère un graphe **non orienté**

- Une **chaîne** est une suite ordonnée de sommets reliés par des arêtes.
- Une **chaîne** est **simple** si elle n'utilise pas plus d'une fois une même arête.
- Une **chaîne** est **fermée** si l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Une **chaîne** est **élémentaire** si elle n'utilise pas plus d'une fois un même sommet.
- Un **cycle** est une chaîne fermée simple.

Exemple 3 *ACEC* est une chaîne qui n'est ni simple, ni élémentaire. *ABCD* est une chaîne simple et élémentaire.

ACEDCB est une chaîne simple non élémentaire.

ACECA est une chaîne fermée.

ABCA et *CABCDEC* et *ABCDECA* sont des cycles.

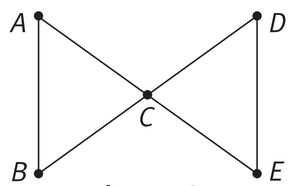


Figure 12

Définition 4

On considère un graphe **orienté**

- Un **chemin** est une suite ordonnée de sommets reliés par des arcs.
- Un **chemin** est **simple** s'il n'utilise pas plus d'une fois un même arc.
- Un **chemin** est **fermé** si l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Un **chemin** est **élémentaire** s'il n'utilise pas plus d'une fois un même sommet.
- Un **circuit** est une chemin fermé simple (c'est un cycle orienté).

Exemple 4 *ABAB* est un chemin qui n'est ni simple, ni élémentaire. *BCDE* est un chemin simple et élémentaire.

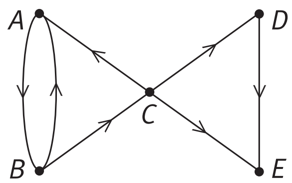


Figure 13

BABCA est un chemin simple non élémentaire.

BAB et *ABCA* sont des cycles.

Définition 5

- Un **graphe** est **complet** si deux sommets quelconques sont adjacents.
- Un **graphe** non orienté est **connexe** si chaque paire de sommets est reliée par une chaîne (on dira qu'un graphe orienté est connexe si le graphe non orienté associé est connexe).
- Un **graphe** est **planaire** si on peut le dessiner dans un plan sans que ses arêtes ne se croisent.
- On appelle **face** (non infinie) d'un **graphe planaire connexe** toute région du plan délimitée par des arêtes, telle que deux points quelconques de cette région peuvent toujours être reliés par une ligne continue qui ne coupe aucune arête.
- Une **face infinie** est une face délimitée partiellement par des arêtes (voir **figures 2** et **4**).

Un graphe planaire peut être donné sous une forme qui peut faire penser qu'il ne l'est pas : voir le graphe de l'activité 2 (cavaliers sur un échiquier 3×3).

Propriété 3 (admise)

Soit G un graphe planaire et connexe, s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces.

On a la relation $\boxed{s-a+f=2}$.

Cette relation est connue sous le nom de "formule d'Euler".

Exemple 5

Le graphe représentant un tétraèdre (voir **figure 4**) est un graphe complet. C'est aussi un graphe planaire et connexe.

La définition 5 nous permet d'énoncer une propriété.

Propriété 4

Un graphe complet est toujours connexe.

Définition 6

- Les deux graphes de l'activité 2 sont dits **isomorphes** car ils traduisent exactement la même situation : ils sont simplement dessinés différemment.

Exemple 6

Montrer que les deux graphes sont isomorphes.

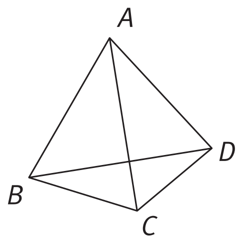


Figure 14.a

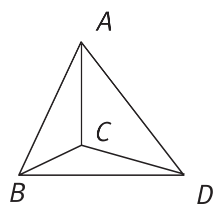


Figure 14.b

Solution

Dans les deux graphes chaque sommet est adjacent aux trois autres : les deux graphes représentent donc la même situation.

On peut aussi le voir en déplaçant, sur la **figure 14.a**, le point C à l'intérieur du triangle ABD.

Définition 7

- La **longueur** d'une chaîne (ou d'un chemin) est le nombre d'arêtes de la chaîne (ou d'arcs du chemin).

Exemple 7

Dans chacun des graphes de la **figure 14** la chaîne $ABCD$ est de longueur 3 et le cycle $ABCDA$ est de longueur 4.

3. Graphe eulérien

Nous avons vu dans l'activité 1 qu'il était impossible de trouver un itinéraire passant une fois et une seule sur chaque pont. Cela revient à dire qu'il est impossible de tracer le graphe des ponts de Königsberg sans lever le crayon.

Exemple 8 **Promenade en Bretagne**

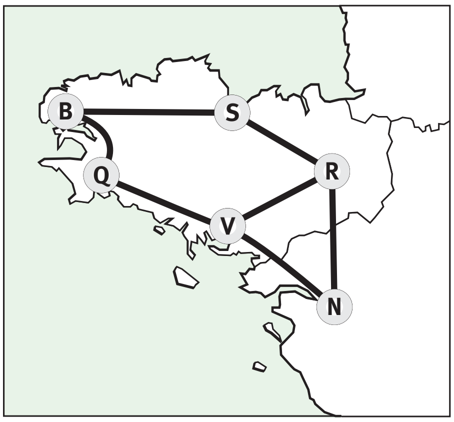


Figure 15

Brieg veut emprunter une fois et une seule chacune des routes reliant deux à deux certaines villes bretonnes dont Brest (B), Nantes (N), Quimper (Q), Rennes (R), Saint-Brieuc (S), Vannes (V).

Les six villes et les sept routes sont sur la **figure 15**.

1) Montrer que cela n'est pas possible en partant de Brest.

2) Est-ce possible en partant de Rennes ? Si oui, quelle doit être la ville d'arrivée ?

Solution Les villes sont les six sommets du graphe et les routes les sept arêtes.

1) *Brieg part de Brest.*

Le sommet B étant de degré 2 le parcours devrait obligatoirement se terminer à Brest. Considérons les sommets R et V qui sont tous les deux de degré 3. Pour ces deux sommets on peut dire que "tout ce qui entre doit sortir" si on veut continuer le parcours. Leur degré étant impair il est impossible que le nombre de sorties soit égal au nombre d'entrées.

Brieg ne peut pas emprunter les sept routes en partant de Brest.

2) *Brieg part de Rennes.*

Pour le sommet V qui est de degré impair le nombre de sorties ne pourra pas être égal au nombre d'entrées. La seule possibilité c'est donc que ce sommet soit le dernier du parcours (on entre 2 fois et on sort une fois).

Donnons un exemple d'itinéraire possible : $R - N - V - Q - B - S - R - V$.

On dit que cette chaîne est une **chaîne eulérienne** car elle passe par toutes les arêtes du graphe.

Brieg peut emprunter les sept routes en partant de Rennes, à condition de terminer par Vannes.

Exemple 9 Métro parisien

C : Châtelet
L : Père Lachaise
M : Gare Montparnasse
N : Nation
O : Opéra
R : République

Les nombres indiquent des numéros de lignes de métro.

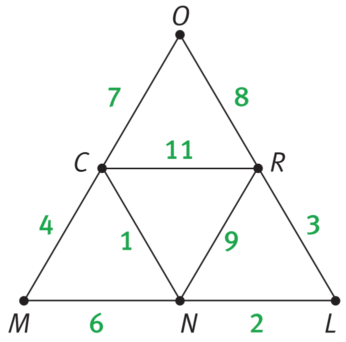


Figure 16

Le graphe de la **figure 16** représente une (petite) partie du plan du métro parisien.

Les six sommets indiquent des correspondances.

Un touriste arrive à la gare Montparnasse et souhaite visiter certains sites de Paris.

1) Peut-il trouver un parcours qui se termine à Montparnasse et qui emprunte chacune des neuf lignes une fois et une seule ?

Si oui, proposer un parcours possible.

2) Peut-on obtenir un cycle en partant de n'importe quel sommet du graphe ?

Solution

1) Tous les sommets du graphe sont de degré pair (2 ou 4). En partant de Montparnasse le touriste pourra donc " entrer et sortir " à chaque correspondance et terminer à Montparnasse.

Un parcours possible est : $M - N - C - R - N - L - R - O - C - M.$

2) Tous les sommets du graphe étant de degré pair il est possible d'établir un circuit qui soit un cycle en partant de n'importe quel sommet du graphe.

Un tel cycle est appelé, en l'honneur d'Euler, **cycle eulérien** et le graphe est alors un **graphe eulérien**.

Définition 8

- Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe.
- Un **cycle eulérien** est un cycle qui passe une fois et une seule par chaque **arête** du graphe.
- Un **graphe eulérien** est un graphe qui possède un cycle eulérien.

Remarque Dans une chaîne eulérienne qui n'est pas un cycle eulérien les sommets de départ et d'arrivée sont distincts (voir exemple 8).

Exemple 10

Le graphe des ponts de Königsberg ne possède ni chaîne eulérienne, ni cycle eulérien.

Le graphe de l'exemple 8 possède des chaînes eulériennes mais pas de cycle eulérien.

Le graphe de l'exemple 9 possède des cycles eulériens.

4. Comment reconnaître si un graphe admet une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien

L'activité 1 ainsi que les exemples 8 et 9 nous montrent l'importance de la parité des degrés des sommets pour trouver des chaînes eulériennes ou des cycles eulériens.

On ne considère que les graphes connexes, c'est-à-dire les graphes dans lesquels deux sommets sont toujours reliés par une chaîne.

Propriété 5

- Un graphe connexe admet une **chaîne eulérienne** si et seulement si le **nombre** de sommets de **degré impair** est **0** ou **2**.
- Un graphe connexe admet un **cycle eulérien** si et seulement si **tous les sommets sont de degré pair**.

Remarque L'exemple 8 nous a montré que lorsque le graphe admet exactement deux sommets de degré impair toute chaîne eulérienne admet obligatoirement ces deux sommets comme extrémités.

5. Graphe hamiltonien

Dans l'activité 3 nous avons trouvé un cycle passant par les vingt sommets du graphe. Nous avons vu aussi qu'il est possible pour un cavalier de parcourir les 64 cases d'un échiquier 8×8 et de revenir à la case de départ. Si les 64 cases sont les sommets d'un graphe cela revient à dire que l'on peut trouver un cycle passant par tous les sommets du graphe. De tels graphes sont appelés graphes hamiltoniens.

Définition 9

- Un **cycle hamiltonien** est un cycle qui passe une fois et une seule par chaque **sommet** du graphe.
- Un **graphe hamiltonien** est un graphe qui possède un cycle hamiltonien.

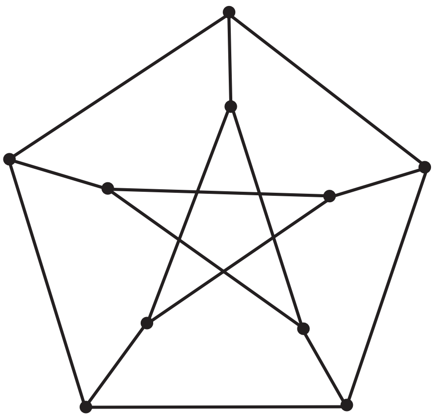


Figure 17

On vient de voir qu'il est facile de reconnaître si un graphe est eulérien ou pas.

Par contre, pour savoir si un graphe est hamiltonien ou pas nous n'avons pas de caractérisation aussi simple.

Reconnaître si un graphe est hamiltonien ou non n'est pas souvent un problème facile! Si on trouve un cycle hamiltonien par tâtonnements tout va bien car la preuve de son existence est faite. Si par contre on ne réussit pas à en trouver un ce n'est pas pour autant qu'il n'en existe pas.

Le graphe de Petersen (voir **figure 17**) n'est pas un graphe hamiltonien (on l'admet).

6. Graphe complet

Exemple 11 **Calendrier de tournoi**

Dans un tournoi chaque joueur doit rencontrer successivement chacun des autres. À l'aide d'un graphe, ou d'une autre représentation, établir un calendrier pour déterminer les rencontres qui se dérouleront chaque journée dans les cas suivants :

- 4 joueurs participent au tournoi.
- 6 joueurs participent au tournoi.
- 5 joueurs participent au tournoi.

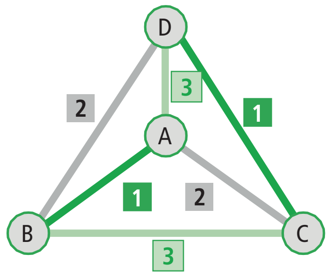
Solution

- Appelons A, B, C et D les 4 joueurs. Comme A peut rencontrer successivement B, C et D le calendrier est assez facile à établir. Donnons trois représentations de ce calendrier.

1	2	3
AB	AC	AD
CD	BD	BC

	A	B	C	D
A		1	2	3
B	1		3	2
C	2	3		1
D	3	2	1	

1 désigne la 1re journée,
2 la 2ème journée, etc.



► **Figure 18**

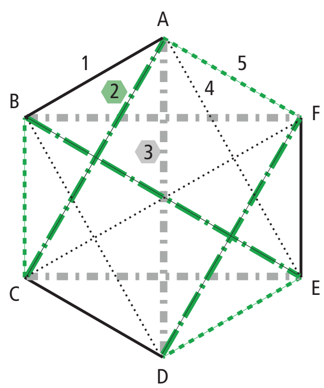
Le calendrier est unique, à une permutation près sur les journées (la première journée pourrait être AC et BD).

Le graphe de la **figure 18** est un **graphe complet** (c'est le graphe du tétraèdre).

- Appelons A, B, C, D, E et F les 6 joueurs.

  Donnons une représentation par un tableau et une autre par un graphe. Pour le tableau il n'est pas utile de remplir la partie inférieure.

	A	B	C	D	E	F
A		1	2	3	4	5
B			5	4	2	3
C				1	3	4
D					5	2
E						1
F						



► **Figure 19**

Le tournoi est organisé sur 5 journées

Cette fois-ci le calendrier n’est pas unique : la première journée pourrait être AB, CE et DF. Il existe en réalité 6 calendriers différents, à une permutation près sur les journées.

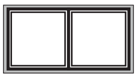
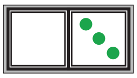
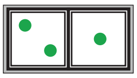
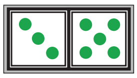
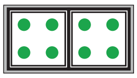
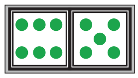
Le graphe de la **figure 19** est un **graphe complet** d’ordre 6.

- Appelons A, B, C, D et E les 5 joueurs. On rajoute un joueur virtuel F pour se ramener à 6 joueurs. De la même façon le tournoi pourra être organisé sur 5 journées avec chaque jour un joueur au repos.

  Si on dessine un graphe avec le point F il ne sera pas complet car le point F sera un sommet isolé. Si on enlève le point F on retrouve un graphe complet d’ordre 5.

Exemple 12 Le jeu de dominos

Un domino est fabriqué en juxtaposant deux nombres pris parmi les nombres de 0 à 6. On peut convenir d’écrire les dominos comme suit : 00, 01, 02, …, 06,11, 12, …, 16, ……, 55, 56, 66. L’ordre des chiffes n’a pas d’importance : ainsi, par exemple, le domino 12 est le même que le domino 21.

Domino						
Écriture	00	03	21	35	44	65

On considère un jeu de 28 dominos (7 doubles et 21 non doubles).

Peut-on, en respectant la règle du jeu de dominos, former une chaîne fermée en juxtaposant tous les dominos ?

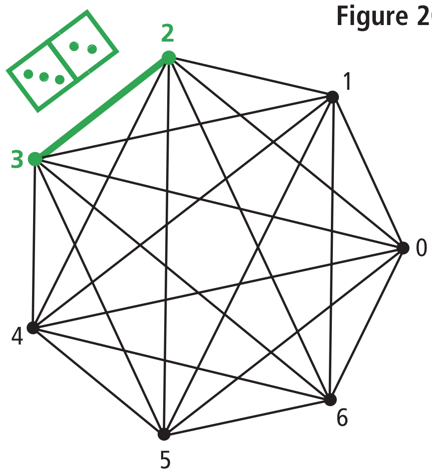
Solution

Considérons uniquement les 21 non doubles, car s’il est possible de former une chaîne fermée avec ces 21 dominos on pourra intercaler les 7 doubles dans la chaîne.

On va représenter un domino par l’arête d’un graphe dont les 7 sommets sont 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Former une chaîne fermée c’est partir d’un sommet et y revenir après être passé une fois et une seule sur chaque arête.

Figure 20



Comme tous les sommets sont de degré 6 on peut trouver un cycle eulérien en partant de n’importe quel sommet.

Comme on peut former une chaîne fermée avec les 21 dominos on peut aussi le faire avec les 28 dominos.

Le graphe des 21 dominos est un **graphe complet** d’ordre 7.

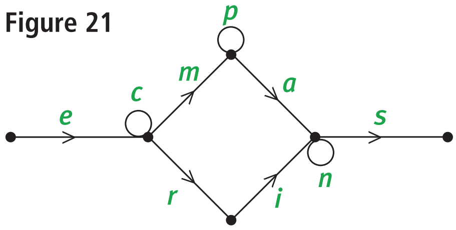
Remarque 01-12-23-34-45-56-60-02-24-46-61-13-35-50-03-36-62-25-51-14-40 est une chaîne fermée possible pour les 21dominos non doubles.

7. Graphe étiqueté

Exemple 13 **Accès codés par des lettres**

Le réseau intranet d'une entreprise doit être accessible à un grand nombre de personnes ayant chacune un code d'accès personnel. Cet accès est régi par le graphe étiqueté de la **figure 21**, noté *G*.

Figure 21



Les "étiquettes" sont les lettres *e, c, m, p, a, r, i, n, s*.

Un "mot" est accepté comme code d'accès si c'est une suite de lettres commençant par ***e*** et se terminant par ***s***, associée à un chemin du graphe.

1) Donner les mots reconnus ayant un nombre minimal de lettres.

2) Donner tous les mots de 5 lettres qui sont reconnus.

3) a. Les mots "*empans*" et "*ecrins*" sont-ils des mots reconnus ?

b. Les mots "*erinas*" et "*emanis*" sont-ils des mots reconnus ?

4) Trouver un mot de 8 lettres qui soit reconnu commençant par "em". Combien en existe-t-il ?

Solution

1) Il faut au minimum 4 lettres : le graphe étiqueté reconnaît deux mots de 4 lettres "*emas*" et "*eris*".

2) Le graphe étiqueté reconnaît les mots de 5 lettres suivants : "*empas*", "*emans*", "*ecmas*", "*erins*" et "*ecris*".

3) a. Les mots "*empans*" et "*ecrins*" sont deux mots reconnus.

b. Les mots "*erinas*" et "*emanis*" ne sont pas des mots reconnus.

4) Le mot "*empannns*" est un mot de 8 lettres commençant par "*em*" et reconnu par le graphe étiqueté.

Si un mot de 8 lettres commence par "*em*" il doit obligatoirement contenir les deux lettres *a* et *s*. Il faut donc rajouter quatre autres lettres prises dans l'ensemble {*p* ; *n*}.

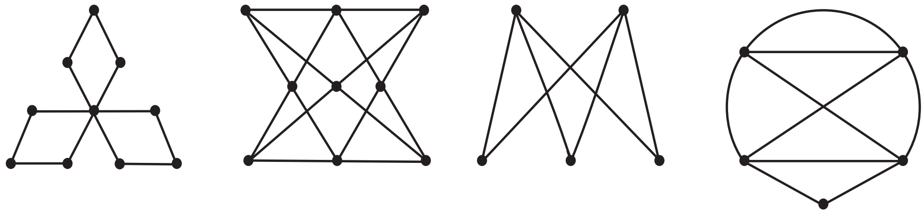
Les mots de 8 lettres commençant par "*em*" sont : "*emppppas*", "*empppans*", "*emppanns*", "*empannns*" et "*emannnns*".

Définition 10

Un graphe orienté est un **graphe étiqueté** si les arcs sont affectés de symboles (lettres, nombres, mots, etc.). Ces symboles sont des " étiquettes".

D Exercices d'apprentissage

Exercice 1 On considère les graphes G_1, G_2, G_3 et G_4 de la **figure 22**.



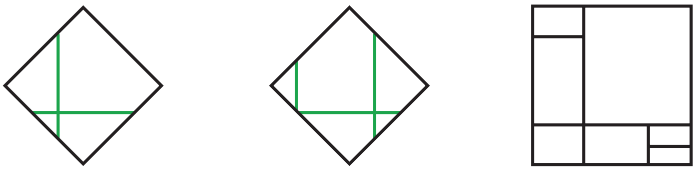
G_1 G_2 G_3 G_4

Figure 22

1. Préciser l'ordre ainsi que le nombre d'arêtes de chaque graphe.
2. Peut-on trouver des arêtes multiples sur l'un des graphes ? Si oui, préciser leur nombre.
3. Déterminer les graphes
   - qui admettent une chaîne eulérienne ;
   - qui admettent un cycle eulérien.

Exercice 2 Dessiner un graphe G dont les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets étant adjacents s'ils correspondent à deux faces du cube ayant une arête commune. Ce graphe G est-il planaire ? complet ? connexe ? eulérien ?

Exercice 3 La **figure 23** comporte 3 figures.



23.a 23.b 23.c

Figure 23

Répondre, pour chacune des trois figures, aux deux questions suivantes.

1. Peut-on parcourir une fois et une seule chacun des segments sans jamais lever le crayon ? Si non, combien de fois faut-il, au minimum, lever le crayon ?
2. Peut-on tracer une ligne continue (sans lever le crayon) traversant tous les segments une fois et une seule ?

Remarque Ces trois figures peuvent faire penser à des compositions de Piet Mondrian (1872 – 1944).

Exercice 4 **La conjecture de Syracuse ou le problème "$3n + 1$"**

On choisit un nombre entier $n \geq 1$.

- Si n est pair on le divise par 2 ;
- Si n est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1 ;
- On recommence la procédure avec le nouveau nombre obtenu.

Ainsi pour $n = 6$ on obtient la liste suivante : 6 – 3 – 10 – 5 – 16 – 8 – **4 – 2 – 1** – **4 – 2 – 1**, etc.

1. Représenter, sous forme de graphe, les parcours obtenus pour $n \in \{1, 2, ..., 19, 20\}$. On sera amené à placer d'autres nombres que les vingt nombres 1, 2, ……, 19, 20. Combien faut-il placer, au minimum, de nombres supplémentaires ?
2. Quelle conjecture peut-on faire ?

> Le nom de "conjecture de Syracuse" est lié à l'université de Syracuse, située aux États-Unis dans l'état de New-York, où le problème fut étudié dans les années 1950. On trouve aussi les noms de "conjecture de Collatz", "conjecture d'Ulam", etc. C'est une conjecture relativement récente et les multiples noms de cette suite montrent qu'il n'est pas facile d'en connaître l'origine exacte. Il semblerait cependant que le mathématicien allemand Lothar Collatz fut l'un des premiers, vers 1937, à introduire cette conjecture.
>
> À ce jour la conjecture n'a toujours pas été démontrée.

Exercice 5

1. Peut-on dessiner dans le plan 9 segments de telle manière que chaque segment coupe exactement 3 autres ?

   Si non, pourquoi ? Si oui, proposer un dessin possible et donner le graphe associé à ce dessin.

2. Peut-on dessiner dans le plan 10 segments de telle manière que chaque segment coupe exactement 3 autres ?

   Si non, pourquoi ?

   Si oui
   - proposer un dessin possible et donner le graphe associé à ce dessin ;

   ou

   - construire un graphe et proposer un dessin possible.

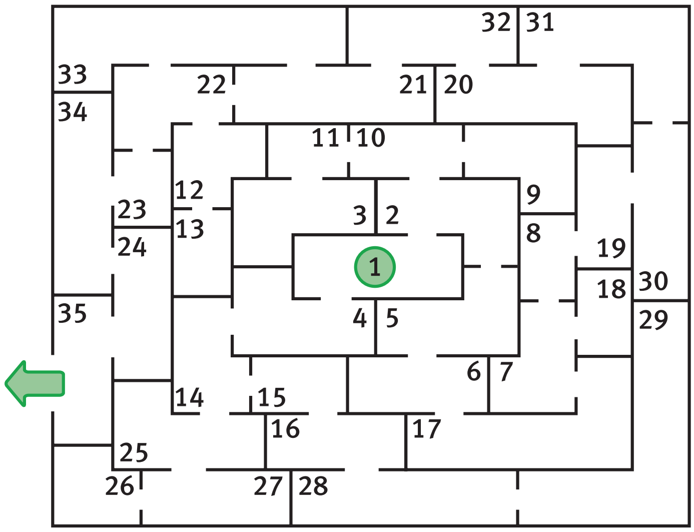
Exercice 6 Le passeur, la chèvre, le chou et le loup

Une chèvre, un chou et un loup se retrouvent sur la rive d'un fleuve. Un passeur souhaite les transporter tous les trois sur l'autre rive à l'aide de sa barque. Il ne peut transporter qu'un seul "élément" à la fois et il ne doit jamais laisser ensemble et sans surveillance la chèvre et le loup ainsi que la chèvre et le chou.

Pouvez-vous proposer une solution au passeur en modélisant la situation par un graphe ?

Combien y a-t-il de solutions possibles ?

Exercice 7 Le labyrinthe



Labyrinthe

Figure 24

1) Représenter le labyrinthe de la **figure 24** par un graphe planaire.

2) a. Déterminer la chaîne qui mène à la sortie et qui passe par le nombre minimum de galeries.

b. Donner le nombre minimum de galeries que Yann devra emprunter pour sortir du labyrinthe (y compris la première et la dernière).

3 Matrice d'adjacence associée à un graphe Chaîne ou chemin de longueur *p*

A Objectifs du chapitre

- Introduire la matrice d'adjacence associée à un graphe.
- Lire sur la matrice d'adjacence d'un graphe certaines caractéristiques du graphe.
- Dénombrer le nombre de chaînes (de chemins) de longueur donnée à l'aide de la matrice d'adjacence.

B Pour débuter

Activité 5 Liaisons ferroviaires

Le graphe de la **figure 25** représente des liaisons ferroviaires directes entre différentes villes françaises.

1. Recopier et compléter le tableau à double entrée T_1 qui représente ce graphe.
2. Dans le tableau T_2 on écrit soit des 0, soit des 1. On écrit 1 lorsqu'une liaison ferroviaire directe existe entre les deux villes considérées et 0 sinon. Recopier et compléter le tableau à double entrée T_2 qui représente ce graphe.

   Écrire le tableau T_2 sous forme d'une matrice carrée 5×5.

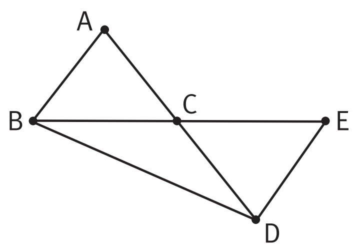


Figure 25

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	*AB*			
B	*BA*				
C					
D					
E					

T_1

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	1			
B	1				
C					
D					
E					

T_2

Activité 6 **Randonnée en montagne**

Un office de tourisme propose un circuit de randonnée en moyenne montagne. Ce circuit est modélisé par le graphe G de la **figure 26**.

- Les points D et F sont respectivement le début et la fin du circuit de randonnée.
- Chaque étape, prévue pour une journée, va d'un sommet à un autre sommet.
- Pour des raisons de sécurité certains parcours sont à sens unique.
- Les longueurs des étapes, exprimées en km, sont indiquées sur le graphe.

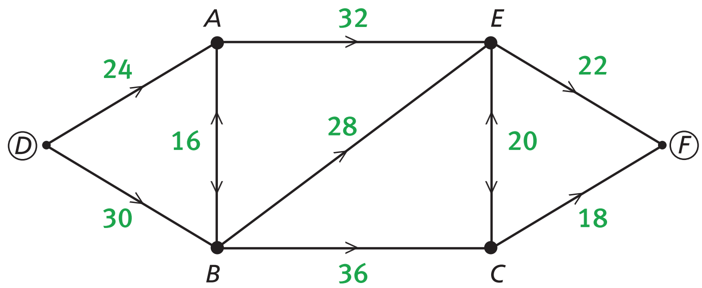


Figure 26

Partie A

1. Quelle est la durée minimale, en jours, d'une randonnée ?
   Citer toutes ces randonnées.
   Quelle est celle dont la distance totale est la plus courte ?
2. Déterminer toutes les randonnées de 4 jours.
3. Énora dispose de 5 jours pour faire une randonnée.
   Quel est le parcours le plus court que peut lui proposer l'office de tourisme ?

Partie B

1. Écrire la matrice carrée M associée au graphe G.

   Les sommets sont classés dans l'ordre D, A, B, C, E, F. Cette matrice M est formée de 0 et de 1.

   On écrit 1 entre un sommet X et un sommet Y si le parcours de X à Y est possible et 0 sinon.

2. Calculer M^2, M^3, M^4 et M^5.

3. **a.** Comparer le nombre situé à droite de la 1re ligne de M^3 et le nombre de randonnées de D à F en 3 étapes.

   b. Comparer le nombre situé à droite de la 1re ligne de M^4 et le nombre de randonnées de D à F en 4 étapes.

   c. Comparer le nombre situé à droite de la 1re ligne de M^5 et le nombre de randonnées de D à F en 5 étapes.

C Cours

1. Matrice d'adjacence associée à un graphe

Exemple 14

On considère le graphe modélisant les ponts de Königsberg (voir chapitre 2 – § B – **figure 5.c**).

Déterminer la matrice carrée E associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

Le terme a_{ij} situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Solution

Le tableau à double entrée associé aux ponts de Königsberg est donné par :

	A	B	C	K
A	0	0	1	2
B	0	0	1	2
C	1	1	0	1
K	2	2	1	0

D'où $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

La matrice E est symétrique par rapport à la diagonale principale composée de zéros. C'est la **matrice d'adjacence** associée au graphe.

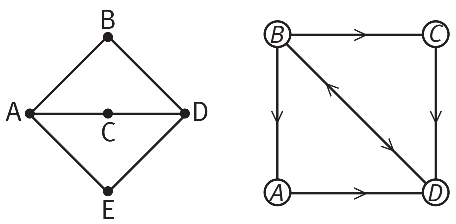
Les nombres " 2 " de la matrice E indique la présence d'arêtes multiples : 2 arêtes relient A et K ainsi que B et K.

Exemple 15

On considère deux graphes G_1 *et* G_2 (voir **figure 27**).

1) Déterminer la matrice carrée M associée au graphe G_1 en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

Calculer M^2 et M^5.



G_1 G_2

Figure 27

2) Remplir un tableau T comme dans l'activité 5 ❶ en mettant un 0 lorsque la liaison entre deux sommets n'existe pas.

On va, comme pour une matrice, " élever ce tableau au carré " de la manière suivante :

$$AB \otimes BC = ABC\,;\ AB \otimes BA = ABA\,;\ 0 \otimes AB = 0.$$

Le produit de T par T est noté $T^2 = T \otimes T$. Déterminer T^2. Quel lien peut-on établir entre M^2 *et* T^2 ?

3) Déterminer la matrice carrée N associée au graphe G_2 en écrivant les sommets dans l'ordre alphabétique.

Calculer N^2 et N^3.

Solution **1)** Les sommets sont pris dans l'ordre A, B, C, D, E.

La matrice associée au graphe G_1 est $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

C'est la **matrice d'adjacence** associée au graphe G_1.

La matrice M est symétrique par rapport à la diagonale principale donc $M = {}^tM$. La calculatrice donne :

$$M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 0 & 36 & 36 & 0 & 36 \\ 36 & 0 & 0 & 36 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 36 & 36 & 0 & 36 \\ 36 & 0 & 0 & 36 & 0 \end{bmatrix}.$$

2)

Le tableau obtenu est $T =$

	A	B	C	D	E
A	0	AB	AC	0	AE
B	BA	0	0	BD	0
C	CA	0	0	CD	0
D	0	DB	DC	0	DE
E	EA	0	0	ED	0

Ce tableau peut être appelé **«matrice» aux arêtes**.

Déterminons $T^2 = T \otimes T =$

	A	B	C	D	E
A	0	AB	AC	0	AE
B	BA	0	0	BD	0
C	CA	0	0	CD	0
D	0	DB	DC	0	DE
E	EA	0	0	ED	0

$\otimes$

	A	B	C	D	E
A	0	AB	AC	0	AE
B	BA	0	0	BD	0
C	CA	0	0	CD	0
D	0	DB	DC	0	DE
E	EA	0	0	ED	0

$T^2 = T \otimes T =$

	A	B	C	D	E
A	ABA ; ACA ; AEA	0	0	ABD ; ACD ; AED	0
B	0	BAB ; BDB	BAC ; BDC	0	BAE ; BDE
C	0	CAB ; CDB	CAC ; CDC	0	CAE ; CDE
D	DBA ; DCA ; DEA	0	0	DBD ; DCD ; DED	0
E	0	EAB ; EDB	EAC ; EDC	0	EAE ; EDE

On note que :

- les " 0 " se trouvent placés aux mêmes places dans M^2 et dans T^2;
- les " 2 " dans M^2 correspondent à 2 chaînes dans T^2;
- les " 3 " dans M^2 correspondent à 3 chaînes dans T^2.

Les nombres obtenus dans M^2 indiquent **le nombre de chaînes de longueur 2** pour aller d'un sommet à un autre.

Le tableau T^2 présente l'avantage de donner, non seulement le nombre de chaînes, mais aussi de les nommer.

Par contre le " calcul " de T^2 ne peut pas se faire à la calculatrice…

On pourrait, en théorie, faire de même pour T^3 mais les " calculs " se compliquent assez vite.

Dans la case située à l'intersection de la 2e ligne et de la 1re colonne on trouverait : *BABA, BDBA, BACA, BDCA, BAEA, BDEA*.

3) Les sommets sont pris dans l'ordre *A B C D*.

La matrice N associée au graphe G_2 est $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

C'est la **matrice d'adjacence** associée au graphe G_2.

La matrice N n'est pas symétrique par rapport à la diagonale principale.

La calculatrice donne $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $N^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Définition 11

Soit G un graphe d'ordre n, les sommets étant numérotés de 1 à n.

- La **matrice d'adjacence** associée à un graphe **non orienté** G est la matrice symétrique d'ordre n telle que le terme a_{ij} situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne soit égal au nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.
- La **matrice d'adjacence** associée à un graphe **orienté** G est la matrice d'ordre n telle que le terme a_{ij} situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut **1** s'il y a un arc d'origine i et d'extrémité j et **0** sinon.

Cette définition nous permet d'énoncer quelques propriétés.

Propriété 6

- La **matrice d'adjacence** associée à un graphe **orienté** G est composée uniquement de **0** et de **1**. C'est une matrice booléenne.
- La **matrice d'adjacence** associée à un graphe **non orienté** G est toujours symétrique par rapport à la diagonale principale. Dans une telle matrice certains termes peuvent être supérieurs à 1.

Remarque Dans la plupart des exercices les matrices d'adjacence associées à des graphes non orientés seront composées uniquement de 0 et de 1.

Propriété 7

Soit G un graphe sans arête multiple, orienté ou non. D'après la définition de la matrice d'adjacence associée à G on peut dire que le nombre de 1 de la matrice est égal à la somme des degrés de tous les sommets (et donc à deux fois le nombre d'arêtes ou d'arcs).

Exemple 16 On donne une matrice A et deux graphes G_1 *et* G_2. La matrice A peut-elle être la matrice d'adjacence associée à G_1 ? à G_2 ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

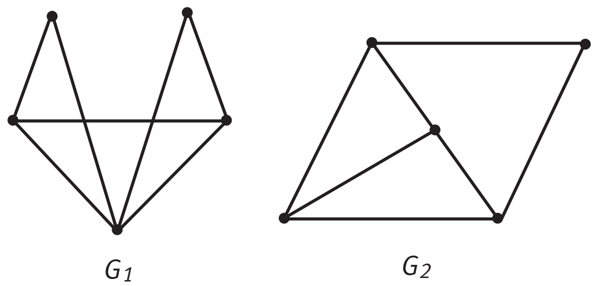


Figure 28

Solution On constate d'abord que le nombre de 1 de la matrice A est égal à deux fois le nombre d'arêtes de chaque graphe.

- Pour G_1

Sur les première et troisième lignes nous avons trois fois le nombre 1. Les deux sommets de degré 3 sont numérotés 1 et 3.

Sur la deuxième ligne nous avons quatre fois le nombre 1. Le seul sommet de degré 4 est le sommet numéro 2.

Sur les quatrième et cinquième lignes nous avons deux fois le nombre 1. Les deux sommets de degré 2 sont numérotés 4 et 5.

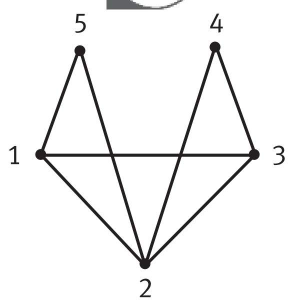


Figure 29

La matrice A peut être associée au graphe G_1 (voir **figure 29**).

▶ Pour G_2

Le graphe G_2 ne possède aucun sommet de degré 4.

On ne pourra pas obtenir la deuxième ligne de A.

La matrice A ne peut pas être associée au graphe G_2.

Exemple 17

On donne $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

La matrice M est la matrice d'adjacence associée à un graphe G.

Donner une représentation du graphe G. Le graphe G est-il planaire ?

Solution

Appelons A, B, C, D, E les sommets du graphe G, pris dans l'ordre alphabétique.

Une représentation possible de G est sur la **figure 30**.

Comme les arêtes ne se croisent pas le graphe G est planaire.

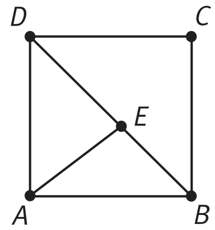


Figure 30

2. Chaîne ou chemin de longueur p

Exemple 18

Considérons le graphe modélisant les 7 ponts de Königsberg et donnons un numéro de 1 à 7 à tous les ponts (**figure 31**).

1) a. Écrire, sur la ligne " parcours " du tableau suivant, les parcours qui permettent d'aller de A à A, de A à B, de A à C et de A à K en franchissant 2 ponts (on peut passer deux fois sur un même pont).

	De A à A	De A à B	De A à C	De A à K
Parcours				
Nombre de parcours				
1re ligne de E^2				

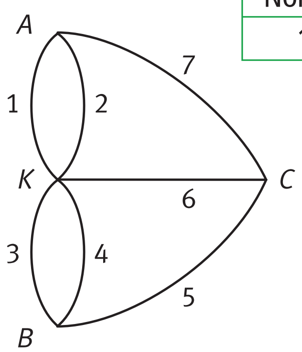


Figure 31

b. Écrire les parcours qui permettent d'aller de C à C et de C à K en franchissant 2 ponts.

c. Déterminer la matrice E^2 où E est la matrice de l'exemple 14. Compléter le tableau. Que remarque-t-on ?

2) a. Écrire les parcours qui permettent d'aller de A à A et de A à B en franchissant 3 ponts.

b. La première ligne de la matrice E^3 est $[\ 4 \quad 4 \quad 11 \quad 22\ ]$. Que remarque-t-on ?

Solution

1) a. On indique les parcours en donnant les numéros successifs des deux ponts franchis.

	De A à A	De A à B	De A à C	De A à K
Parcours	11-12-21-22-77	13-14-23-24-75	16-26	76
Nombre de parcours	**5**	**5**	**2**	**1**
1re ligne de E^2	**5**	**5**	**2**	**1**

b. On indique les parcours en donnant les numéros successifs des deux ponts franchis.

	De C à C	De C à K
Parcours	55-66-77	53-54-71-72
Nombre de parcours	**3**	**4**

c. La calculatrice nous donne comme matrice $E^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 5 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

On complète le tableau et on observe que les nombres inscrits dans les deux dernières lignes du tableau sont identiques.

La première ligne de E^2 donne le nombre de parcours de " longueur " égale à 2 partant de A.

2) a. On indique les parcours en donnant les numéros successifs des trois ponts franchis.

	De A à A	De A à B
Parcours	167-267-761-762	165-265-763-764
Nombre de parcours	**4**	**4**

b. La première ligne de la matrice E^3 est $[\ \mathbf{4} \quad \mathbf{4} \quad 11 \quad 22\ ]$.

On note que les deux premiers termes de la première ligne de E^3 sont identiques aux nombres de parcours allant de A à A et de A à B en franchissant 3 ponts.

Exemple 19

On reprend le graphe G_2 de la **figure 27**, exemple 15.

1) a. Déterminer la " matrice aux arcs " associée à ce graphe ; on la notera F.

b. Déterminer la " matrice " $F^2 = F \otimes F$. Trouver un lien entre N^2 et F^2.

2) a. Compter le nombre de chemins de longueur 3 partant de B ; les citer tous.

b. Comparer ces nombres avec ceux de la deuxième ligne de la matrice N^3.

Solution **1) a.** On obtient :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & AD \\ BA & 0 & BC & BD \\ 0 & 0 & 0 & CD \\ 0 & DB & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Déterminons

$$F^2 = F \otimes F \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & AD \\ BA & 0 & BC & BD \\ 0 & 0 & 0 & CD \\ 0 & DB & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & AD \\ BA & 0 & BC & BD \\ 0 & 0 & 0 & CD \\ 0 & DB & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^2 = F \otimes F \quad \begin{pmatrix} 0 & ADB & 0 & 0 \\ 0 & BDB & 0 & BAD\ ;\ BCD \\ 0 & CDB & 0 & 0 \\ DBA & 0 & DBC & DBD \end{pmatrix}$$

Les matrices N^2 et F^2 comportent chacune 9 zéros.

Là où se trouvent des 1 dans la matrice N^2 on obtient un chemin dans F^2.
Là où se trouve un 2 dans la matrice N^2 on obtient deux chemins dans F^2.

La matrice F^2 donne la composition de tous les chemins de longueur 2 ; la matrice N^2 donne le nombre de chemins de longueur 2 entre les différents sommets du graphe.

Les exemples 15, 18 et 19 nous ont montré qu'il existe un lien entre les coefficients d'une matrice d'adjacence élevée au carré et le nombre de chaînes (ou chemins) de longueur 2.

On admet que :

- la propriété que l'on vient de vérifier sur ces exemples (pour une longueur égale à 2) est toujours vraie ;
- la propriété que l'on vient de vérifier sur ces exemples pour une longueur égale à 2 est vraie aussi pour une longueur p quelconque.

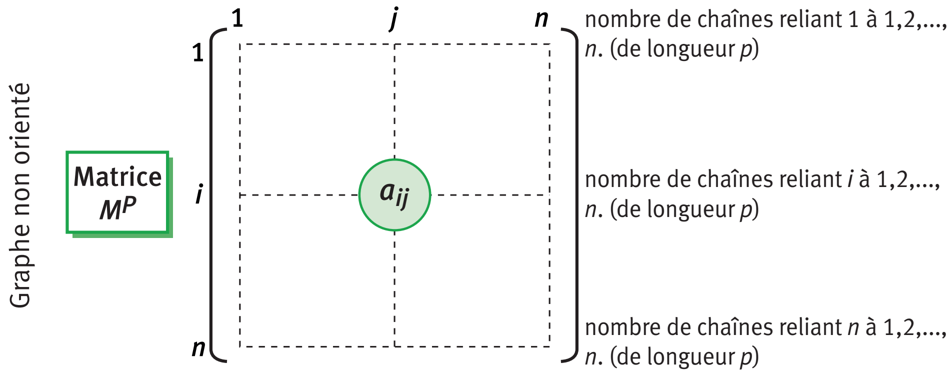
Les " *matrices aux arêtes* (ou aux arcs) " ne sont pas au programme. Elles apparaissent dans cette séquence dans le seul but de montrer le lien entre la matrice M^2 et le nombre de chaînes (ou chemins) de longueur 2.

Propriété 8

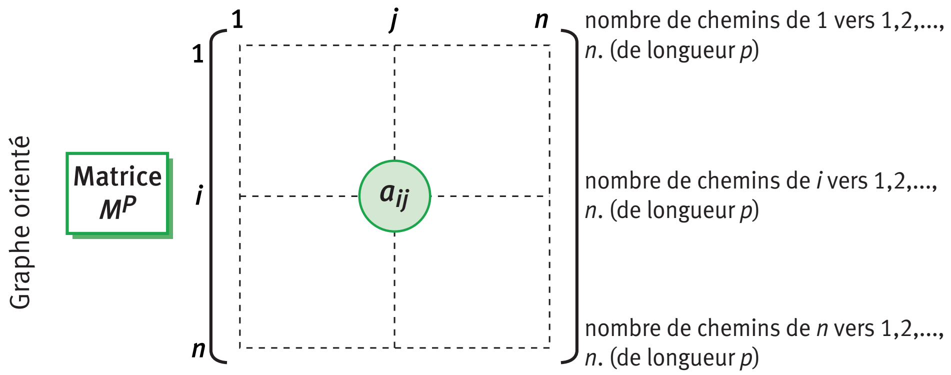
Soit M la matrice d'adjacence associée à un graphe G d'ordre n.

- Si G est un graphe **non orienté** alors **le terme a_{ij}** de la matrice M^p, situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, est égal au **nombre de chaînes de longueur p reliant i à j**.
- Si G est un graphe **orienté** alors **le terme a_{ij}** de la matrice M^p, situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, est égal au **nombre de chemins de longueur p partant de i et arrivant en j**.

Montrons, sur la matrice carrée M^P, ce que cela signifie :



Le terme au croisement de la ligne i et de la colonne j indique le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.



Le terme au croisement de la ligne i et de la colonne j indique le nombre de chemins de longueur p allant de i à j.

D Exercices d'apprentissage

Exercice 8 On reprend le graphe G_1 de l'exemple 15. Déduire du calcul de la matrice M^5 que le graphe G_1 n'est pas hamiltonien.

Exercice 9 On considère le graphe G de la **figure 32.**

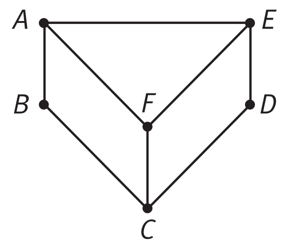


Figure 32

❶ Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe G.

❷ Calculer les matrices M^2 et M^3.

❸ **a.** En déduire :

- le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A ;
- le nombre de chaînes de longueur 2 arrivant en B ;
- le nombre de chaînes de longueur 2 entre A et F ; entre C et F.

b. Déterminer le nombre total de chaînes de longueur 3.

c. Combien y a-t-il de cycles de longueur 3 ? Pouvait-on le prévoir ?

d. Citer toutes les chaînes de longueur 3 reliant A à D.

Exercice 10 On considère le graphe étiqueté de l'activité 4.

❶ Comment vérifier que le graphe permet de former huit nombres de 6 chiffres (sans tenir compte de la divisibilité par 3) ?

❷ L'administration du lycée impose que tous les codes aient 8 chiffres et que tous les nombres de 8 chiffres soient acceptés.

a. Le professeur peut-il alors donner des codes différents à tous les élèves de sa classe, ainsi qu'à lui-même (les nombres non divisibles par 3 sont acceptés) ?

b. Les élèves de quatre classes et les quatre professeurs de mathématiques ont besoin d'un code personnel. S'il y a 31 élèves dans chacune des classes combien faut-il de chiffres au minimum pour former un code ?

Exercice 11 Soit M la matrice d'adjacence associée à un graphe G dont les sommets A, B, C, D et E sont pris dans l'ordre alphabétique.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

❶ **a.** Le graphe G est-il orienté ou non ?

b. Donner l'ordre de G ainsi que le degré de chaque sommet.
Quel est le nombre d'arêtes (ou d'arcs) de G ?

c. Trouver, à l'aide de la matrice M, si le graphe possède des sommets non adjacents. Si oui, lesquels ?

❷ Déterminer la matrice M^2.

En déduire

- Le nombre de chemins de longueur 2 partant de B.
- le nombre de chemins de longueur 2 arrivant en B.
- Le couple $(X ; Y)$ où il n'existe pas de chemin de longueur 2 allant de X à Y.

❸ On enlève les orientations des arcs du graphe G pour obtenir un graphe non orienté F ayant les mêmes sommets (si deux sommets X et Y sont reliés par des arcs $X \rightarrow Y$ et $X \leftarrow Y$ on obtient deux arêtes multiples de F).

On appelle N la matrice d'adjacence associée au graphe F.

a. La matrice N peut s'écrire $N = M + X$. Quelle relation existe-t-il entre M et X ?

b. Écrire la matrice N et déterminer N^2.

c. Donner le nombre de chaînes fermées de longueur 2.

Exercice 12 Soit M la matrice d'adjacence associée à un graphe G **non orienté** d'ordre 8.

Les huit sommets sont classés dans l'ordre D, A, B, C, E, H, K, F.

On connaît la dernière colonne de la matrice M et la première ligne de la matrice M^4.

Dernière colonne de M	Première ligne de M^4
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20 & 11 & 19 & 12 & 14 & 6 & 21 & 6 \end{bmatrix}$

Déterminer le nombre de chaînes de longueur 5 reliant D à F.

Exercice 13 Cinq équipes, notées A, B, C, D et E font partie d'un même groupe éliminatoire pour un championnat d'Europe. Chaque équipe doit rencontrer deux fois les quatre autres équipes (match aller et match retour).

Le tableau suivant indique les matchs qui ont déjà été joués.

1. Représenter le graphe orienté des rencontres.
2. Déterminer la matrice d'adjacence M associée au graphe orienté des rencontres (prendre les lettres dans l'ordre alphabétique).
3. Donner une interprétation de :
   - la somme de chaque ligne de M;
   - la somme de chaque colonne de M;
   - la somme de tous les termes de M.
4. Comment trouver, à l'aide de M, le nombre de matchs joués par chaque équipe ?

Équipe (sommet)	Successeur (s'est déplacée en …)
A	$C ; D ; E$
B	$A ; D$
C	$A ; B ; E$
D	$A ; B ; C$
E	$B ; C ; D$

Exercice 14 **Partie A – Vrai - Faux**

Un réseau informatique doit être accessible à un grand nombre de personnes, qui ne doivent pas cependant avoir le même code d'accès. Cet accès est régi par le graphe étiqueté de la **figure 33.a**, noté G.

Répondre par " Vrai " ou " Faux " aux dix affirmations suivantes :

1. Le graphe reconnaît le nombre 2 469.
2. Le graphe reconnaît le nombre 23 479.
3. Un nombre reconnu est formé au minimum de 3 chiffres.
4. Un nombre reconnu contient, au moins une fois, le chiffre 5 ou le chiffre 7.
5. Le graphe reconnaît 3 nombres de 3 chiffres.

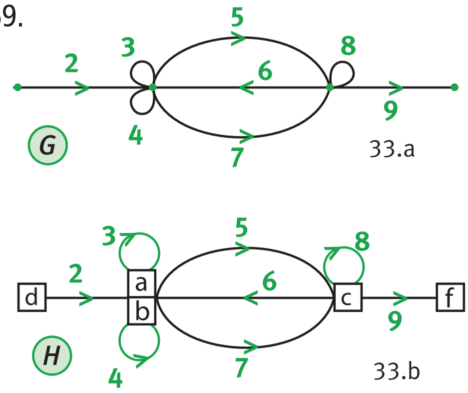


Figure 33

6. Le graphe reconnaît des nombres finissant par 659.
7. Dans un nombre de dix chiffres reconnu par le graphe on peut trouver 4 fois le chiffre 6.
8. Le graphe reconnaît exactement 6 nombres de 4 chiffres.
9. Le graphe reconnaît au plus 16 nombres de 5 chiffres.
10. Le graphe reconnaît au moins 16 nombres de 5 chiffres.

Partie B

Au graphe étiqueté de la **figure 33.a** on peut associer le graphe étiqueté *H* de la **figure 33.b** qui possède 5 sommets .

1. Donner la matrice d'adjacence *M* associée au graphe *H* (prendre les lettres dans l'ordre *dabcf*).
2. Vérifier les réponses aux questions 3), 5), 8), 9) et 10) de la partie A.

Exercice 15

Considérons sept villes d'Europe, numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Ces villes sont reliées entre elles par un réseau de lignes aériennes dites "à bas coût". Les vols directs sont donnés dans un tableau.

Ville	Successeur
1	6 ; 7
2	7
3	2 ; 4
4	5
5	7
6	5 ; 3
7	1 ; 2 ; 4

6 est un successeur de 1 signifie qu'il existe un vol direct $1 \to 6$.

1. Représenter le graphe orienté *V* des vols directs entre ces sept villes.
2. Déterminer, à l'aide du graphe, toutes les liaisons aériennes entre deux villes distinctes comportant une seule escale.

   Comment peut-on vérifier le nombre de ces liaisons à l'aide d'une matrice ?
3. Trouver le nombre de vols partant de 1 et comportant deux escales. Parmi ces vols, quels sont ceux qui correspondent à des chemins élémentaires ?
4. Existe-t-il, entre deux villes distinctes, au moins une liaison aérienne comportant au plus trois escales ? Si oui, pourquoi ? Si non, donner les villes qui ne seraient pas reliées par de telles liaisons aériennes.

4 Synthèse de la séquence

▶ Lexique

Adjacent Deux sommets adjacents - ou voisins - sont deux sommets reliés par une arête (ou un arc).

Arc Un arc est une arête orientée ; un arc possède une origine et une extrémité.

Arête Une arête relie deux sommets d'un graphe non orienté. Ces deux sommets sont les extrémités de l'arête.

Arête multiple Si deux sommets sont reliés par au moins deux arêtes, chacune est une arête multiple.

Biparti Un graphe biparti est un graphe dont les sommets peuvent être divisés en deux classes de telle manière que deux sommets d'une même classe ne soient jamais adjacents.

Boucle Une boucle est un arc (ou une arête) reliant un sommet à lui-même.

Chaîne
- Une chaîne est une suite ordonnée de sommets reliés par des arêtes.
- Une chaîne élémentaire est une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet.
- Une chaîne fermée est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Une chaîne simple est une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête.

Chemin
- Un chemin est une suite ordonnée de sommets reliés par des arcs.
- Un chemin élémentaire est un chemin qui n'utilise pas deux fois le même sommet.
- Un chemin fermé est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Un chemin simple est un chemin qui n'utilise pas deux fois le même arc.

Circuit Un circuit est un chemin fermé simple : c'est un cycle orienté.

Complet Un graphe complet est un graphe dont tous les sommets sont adjacents.

Connexe Un graphe connexe est un graphe dont chaque sommet est relié à chacun des autres sommets par une chaîne (ou un chemin).

Cycle Un cycle est une chaîne fermée simple (la chaîne revient à son point de départ).

Degré Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité.

Etiqueté Un graphe orienté est un graphe étiqueté si les arcs sont affectés de symboles (lettres, nombres, mots, etc.). Ces symboles sont des étiquettes.

Eulérien
- Une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe.
- Un cycle eulérien est un cycle qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe.
- Un graphe eulérien est un graphe qui possède un cycle eulérien.

Face
- Une face (non infinie) est une région du plan délimitée par des arêtes, telle que deux points quelconques de cette région peuvent toujours être reliés par une ligne continue qui ne coupe aucune arête.
- Une face infinie est une face délimitée partiellement par des arêtes.

Graphe
- Un graphe est un ensemble de points appelés sommets, certains étant éventuellement reliés entre eux par des arêtes (ou des arcs).
- Un graphe planaire est un graphe que l'on peut dessiner dans le plan sans que ses arêtes (ou arcs) ne se croisent.
- Un graphe simple est un graphe qui ne contient pas d'arête multiple.

Hamiltonien Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe une fois et une seule par tous les sommets du graphe. Un graphe hamiltonien est un graphe qui possède un cycle hamiltonien.

Isomorphes Deux graphes sont isomorphes s'ils représentent la même situation.

Longueur La longueur d'une chaîne (d'un chemin) est le nombre d'arêtes (d'arcs) qui la (le) composent.

Matrice d'adjacence associée à un graphe
- Matrice d'adjacence associée à un graphe non orienté d'ordre n.

C'est la matrice symétrique d'ordre n telle que le terme a_{ij} situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne soit égal au nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.

- Matrice d'adjacence associée à un graphe orienté d'ordre n.
- C'est la matrice d'ordre n telle que le terme a_{ij} situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut 1 s'il y a un arc d'origine i et d'extrémité j et 0 sinon.

Ordre L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

Sommet
- Un sommet est une des extrémités d'une arête (ou d'un arc) ou un point isolé d'un graphe.
- Un sommet isolé est de degré 0.
- Un sommet de degré 1 est un sommet pendant.

Degré des sommets

- La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes : $d = 2a$
- La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est toujours un nombre pair.
- Dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est pair.

Chaîne eulérienne, cycle eulérien

- Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.
- Si un graphe connexe possède exactement deux sommets de degré impair alors ces deux sommets sont les extrémités de la chaîne eulérienne.
- Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.
- Pour tracer un cycle eulérien on peut partir de n'importe quel sommet du graphe.

Formule d'Euler

Si G est un graphe connexe et planaire alors $s - a + f = 2$

Graphe hamiltonien

- Montrer qu'un graphe est hamiltonien ou qu'il ne l'est pas n'est pas toujours facile. Dans les exercices proposés les cycles hamiltoniens, s'ils existent, ne sont pas trop difficiles à obtenir.

Matrice d'adjacence associée à un graphe

- La matrice d'adjacence associée à un **graphe orienté** est composée uniquement de 0 et de 1.
- La matrice d'adjacence associée à un **graphe non orienté** est toujours symétrique par rapport à la diagonale principale.
- Dans la matrice d'adjacence associée à un **graphe non orienté** des termes peuvent être supérieurs à 1.
- Le nombre de 1 d'une matrice d'adjacence associée à un graphe simple (sans arête multiple), orienté ou pas, est égal à la somme des degrés de tous les sommets.

▶ Chaîne ou chemin de longueur *p*

- Soit M la matrice d'adjacence associée à un graphe G d'ordre n.
- Si G est un **graphe non orienté** alors le terme $\boldsymbol{a_{i\,j}}$ de la matrice $\boldsymbol{M^p}$, situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, est égal au **nombre de chaînes de longueur *p* reliant *i* à *j***.
- Si G est un **graphe orienté** alors le terme $\boldsymbol{a_{i\,j}}$ de la matrice $\boldsymbol{M^p}$, situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, est égal au **nombre de chemins de longueur *p* partant de *i* et arrivant en *j***.

5 Exercices de synthèse

Exercice I Le graphe $K_{3,3}$

Le graphe G représenté sur la **figure 34** est un graphe complet biparti. On dit qu'il est biparti car on peut partager l'ensemble des sommets de G en deux parties E et F de telle manière qu'il n'y ait aucune arête entre éléments de E ni aucune arête entre éléments de F.

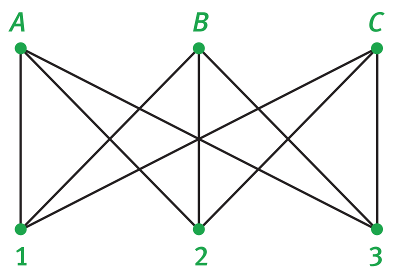


Figure 34

On va montrer que G ne peut pas être planaire, c'est-à-dire qu'il est impossible d'en donner une représentation où les arêtes ne se croisent pas.

Pour cela on va faire un raisonnement par l'absurde : on va supposer qu'il est planaire et montrer que cela mène à une contradiction.

On suppose que le graphe G est planaire.

1. Quel serait, d'après la formule d'Euler, le nombre f de faces ?
2. Dire pourquoi dans ce graphe biparti aucune face ne peut être triangulaire. Quel est donc le nombre minimum d'arêtes de chaque face ?
3. Comparer $4f$ et $2a$ où a est le nombre d'arêtes de G.

   En déduire une contradiction et conclure.
4. *Application : le problème des trois villas.*

   On suppose que • A, B et C sont trois villas ;
   - 1 est une usine de production d'eau ;
   - 2 est une usine de production de gaz ;
   - 3 est une usine de production d'électricité.

   Montrer qu'il est impossible de placer les 9 conduites dans un même plan sans qu'au moins deux ne se croisent.

Remarque Ce graphe G est souvent désigné par $K_{3,3}$. Les deux nombres 3 indiquent que chaque classe contient 3 sommets. La lettre K est l'initiale du mathématicien polonais Kazimierz KURATOWSKI (1896 – 1980).

C'est ce graphe qui lui a permis, en 1930, de donner une caractérisation des graphes planaires.

Exercice II Graphes isomorphes

On considère les graphes G_1 *et* G_2 de la **figure 35**.

❶ Montrer que ces deux graphes sont isomorphes, c'est-à-dire qu'ils modélisent la même situation.

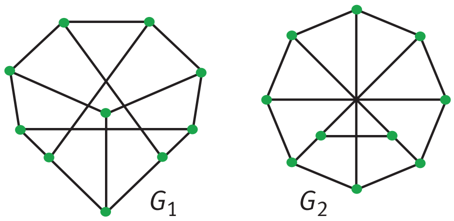


Figure 35

❷ On veut parcourir une fois et une seule chacune des 15 arêtes du graphe G_1 ou du graphe G_2.

a. Pourquoi ne peut-on pas le faire sans lever le crayon ?

b. Combien de fois, au minimum, faut-il lever le crayon ? (ces deux graphes sont aussi isomorphes au graphe de Petersen ; voir chapitre 2– §C 5 Figure 17).

Exercice III Cavaliers sur un échiquier $m \times n$ avec m et n impairs

Remarques

- On exclut le cas ou l'un au moins des deux nombres est égal à 1 car tout mouvement de cavalier est impossible sur un tel échiquier.

- On rappelle que la couleur de la case change à chaque saut du cavalier.

▶ Nous avons vu dans l'activité 3 que sur un échiquier 3×3 le cavalier ne peut jamais atteindre la case centrale. Sur un tel échiquier il est donc impossible pour un cavalier de parcourir toutes les cases.

A	B	C	D	E
F	G	H	J	K
L	M	N	O	P
Q	R	S	T	U
V	W	X	Y	Z

Figure 36

▶ Considérons maintenant un échiquier 5×5 comportant 13 cases noires et 12 cases blanches (voir **figure 36**).

❶ On place un cavalier sur la case blanche F.

Montrer, en considérant la couleur des cases, que le cavalier ne pourra pas se déplacer sur les 25 cases de l'échiquier.

❷ On place un cavalier sur la case noire A.

a. Montrer, en considérant la couleur des cases, que le cavalier ne pourra pas revenir sur la case de départ. Peut-on trouver un cycle hamiltonien sur un échiquier 5×5 ?

b. Proposer un chemin où le cavalier parcourt toutes les cases de l'échiquier (sans revenir sur la case de départ).

▶ Considérons maintenant un échiquier $m \times n$ (avec m et n impairs). Le nombre total de cases est un nombre impair. Supposons que le nombre de cases noires soit impair ce qui implique que le nombre de cases blanches soit pair.

❸ On place un cavalier sur une case blanche. Peut-il atteindre toutes les cases ?

❹ On place un cavalier sur une case noire. Peut-il revenir sur la case de départ ?

Un cycle hamiltonien est-il possible sur un tel échiquier ?

Exercice IV — Énigme cinématographique

L'énigme mathématique suivante a été posée dans le film "Une journée en enfer" de John McTiernan, sorti en 1995.

> ***Énigme***
>
> Près d'une fontaine on dispose de deux bidons, l'un de 3 litres, l'autre de 5 litres.
>
> Comment procéder pour obtenir 4 litres d'eau ?
>
> (*les bidons ne sont pas gradués…*)

Déterminer, en modélisant cette énigme par un graphe orienté***, une solution au problème posé.

La solution est-elle unique ?

*** On peut prendre pour sommets les couples donnant le contenu de chaque bidon.

On place un arc entre deux sommets quand on peut passer d'un couple à un autre.

$$(\underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{Contenu du bidon de 3 l}} \; ; \; \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{Contenu du bidon de 5 l}})$$

Exercice V — Graphe de dominance

Un tournoi de handball rassemble cinq équipes *A, B, C, D et E*. Chaque équipe rencontre une seule fois les quatre autres.

Les résultats des matchs sont donnés dans le tableau suivant :

Équipe (sommet)	Successeur
A	B ; C ; D
B	D ; E
C	B ; D ; E
D	Aucun
E	A ; D

Les successeurs du sommet A sont B, C et D.

Cela signifie que l'équipe A a battu ces trois équipes.

1. Conjecturer un classement possible de ce tournoi.
2. **a.** Représenter le graphe des victoires G correspondant à ce tableau.

   b. Soit M la matrice d'adjacence associée au graphe G. Donner la matrice M.
3. On va établir un classement de la manière suivante :
   - 1 point par victoire directe (ou au 1^{er} degré) ;
   - 1 point par victoire au " second degré ".

On dit qu'une équipe X est meilleure au second degré qu'une équipe Z si X a battu une équipe Y qui elle-même a battu Z.

On peut donner comme exemple $A \to C \to B$; ainsi A est meilleure que B au second degré.

La matrice M indique les victoires directes qui sont les chemins de longueur 1.

Les victoires au second degré sont des chemins de longueur 2 ; on peut donc les obtenir en déterminant la matrice M^2.

a. On pose $S = M + M^2$. Déterminer la matrice S.

b. Expliquer pourquoi cette matrice S permet d'établir le classement.

c. Donner le classement final de ce tournoi.

Exercice VI Visites dans la ville

L'office de tourisme de la ville - virtuelle - de Phareg organise des parcours pour que les touristes puissent visiter la ville.

Le plan de la ville est sur la **figure 37** et T désigne l'office de tourisme. Certains tronçons du parcours sont en sens unique. Il faut environ une demi-journée pour tout visiter.

On ne considère que les visites (circuits) qui commencent et qui finissent en T.

On désigne par M la matrice d'adjacence associée au graphe représentant le plan de la ville (les sommets sont pris dans l'ordre T, A, B, C, D, E, F).

1. a. Écrire la matrice M.

   b. Déterminer, sans calcul, le nombre de circuits de longueur 2.

2. a. Yann, qui ne dispose que de deux heures, décide de visiter trois sites. Déterminer tous les circuits possibles.

   b. Énora dispose de davantage de temps et veut visiter quatre sites.

   Que peut lui proposer l'office de tourisme ?

   c. Peut-on visiter tous les sites sans passer deux fois devant le même ?

   Si oui, citer tous les circuits possibles.

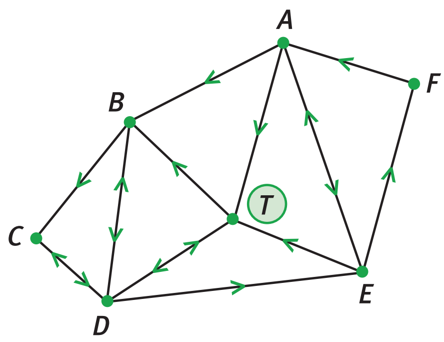


Figure 37

Exercice VII La table ronde

Un groupe de huit personnes se retrouve pour dîner dans un restaurant autour d'une table ronde. Des incompatibilités d'humeur existent entre certaines personnes de ce groupe.

Le graphe G de la **figure 38** indique l'incompatibilité entre deux personnes par une arête entre deux sommets du graphe.

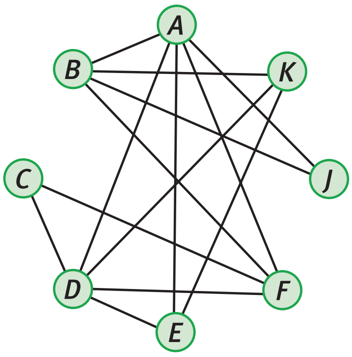


Figure 38

❶ Déterminer un plan de table possible (s'il en existe).

❷ On suppose que A reste à la place qu'il occupe sur la **figure 38**.

Combien de plans de table peut-on proposer ? Les citer tous.

■