Séquence 10

Géométrie dans l'espace

Sommaire

Dans cette séquence, il s'agit d'une part de renforcer la vision dans l'espace et d'autre part de donner tous les outils algébriques et géométriques permettant de traiter les problèmes d'intersections de droites et de plans.

1 Prérequis

A Géométrie plane

1. Vecteurs et colinéarité

Définition

La **translation** qui transforme A en B est la translation de **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

Conséquence Un vecteur est donc un « objet mathématique » qui caractérise une translation.

Il est donc défini par la donnée :

- d'**une direction**, ici la droite (AB) ;
- d'**un sens**, ici de A vers B ;
- et d'**une longueur** (on dit aussi **une norme**), ici AB.

Définition

Soit A, B, C et D quatre points du plan. On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les segments [AD] et [BC] ont le même milieu (c'est-à-dire si et seulement si ABDC est un parallélogramme).

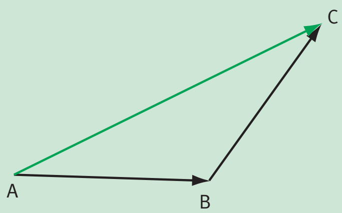
Propriété

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\right)$ où $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;\,y_B\right)$.

Propriété *Règle de Chasles*

Soit A, B et C trois points du plan.

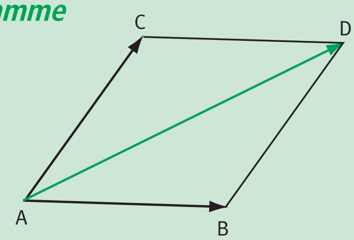
On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



Propriété *Règle du parallélogramme*

Soit A, B et C trois points du plan.

On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, où D est le point tel que ABDC soit un parallélogramme.



Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que :

$$\vec{u}=k\cdot\vec{v} \text{ ou } \vec{v}=k\cdot\vec{u}.$$

▸ **Conséquence** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan différents du vecteur nul.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

2. Décomposition d'un vecteur en fonction de deux vecteurs donnés

Propriété

Deux vecteurs *non colinéaires* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant fixés, il n'y a *qu'une seule façon* de décomposer un vecteur $\vec{w}$ sous la forme : $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$ où x et y sont deux nombres réels.

Définition

On dit que deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment **une base** $(\vec{u},\vec{v})$ du plan.

Lorsque l'on décompose, de façon unique, un vecteur $\vec{w}$ sous la forme : $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$, on dit que les nombres x et y sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

Lorsque que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, orthogonaux et de norme 1, on dit que la base $(\vec{u},\vec{v})$ est **orthonormée**.

3. Équations cartésiennes de droite

Propriété

Dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$ du plan, les vecteurs $\vec{u}(a\ ;\ b)$ et $\vec{v}(c\ ;\ d)$ ont la même direction si et seulement si $ad = bc$ (c'est-à-dire les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles).

Définition

On dit qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ si et seulement s'il est colinéaire à un vecteur défini à l'aide de deux points distincts de cette droite.

Propriété

Dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$ du plan, si une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées) a pour coefficient directeur m (donc cette droite a une équation de la forme $y = mx + p$), l'un de ses vecteurs directeurs est le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées : $\vec{u}(1\,;m)$.

Propriété

Dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, une droite a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}(-b\ ;\ a)$ si et seulement si elle a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$, a et b n'étant pas nuls tous les deux et c étant un réel quelconque.

B Produit scalaire dans le plan

1. Les différentes expressions du produit scalaire

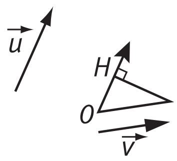
Remarque

Le produit scalaire est un *nombre réel*.

a) Cas particulier : vecteurs colinéaires

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et se note parfois $\vec{u}^2$.

b) Cas général



- Avec une projection orthogonale

  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ où $\overrightarrow{OH}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

- Avec cosinus et l'angle de vecteurs

  Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$.

- Avec la norme uniquement

  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right].$$
  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right].$$
  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} \times \left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right].$$

- Expression analytique dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$

  Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

2. Propriétés

a) Produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, on a : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque La relation $\vec{u} \perp \vec{v}$ signifie soit que $\vec{u} = 0$, soit que $\vec{v} = 0$, soit que leurs directions sont perpendiculaires.

b) Propriétés opératoires

Propriété

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k réel.

- *Symétrie* : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- *Linéarité* : $\vec{u} \cdot (\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$ et $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

  produit scalaire — multiplication dans $\mathbb{R}$

  produit d'un vecteur par un réel

- *Identités remarquables*

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\times(\vec{u}\cdot\vec{v})\ ;$$
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\times(\vec{u}\cdot\vec{v})\ ;$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2.$$

c) Applications : calculs de longueurs, d'angles…

Les deux résultats ci-dessous ne sont pas exigibles !

- Relation d'Al Kashi

Soit ABC triangle

Alors

$$BC^2=AC^2+AB^2-2\times AC\times AB\times\cos(\overrightarrow{AC}\ ;\overrightarrow{AB})\ \text{soit}$$
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A})$ en notant BC = a, AC = b et AB = c.

■ *Démonstration*

On a :

$$BC^2=(\overrightarrow{BC})^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=AC^2+AB^2-2\times(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})$$
$$=AC^2+AB^2-2\times AC\times AB\times\cos(\overrightarrow{AC}\ ;\overrightarrow{AB})$$

Théorème de la médiane

Soit ABC triangle et I milieu de [BC]. Alors : $AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{BC^2}{2}$.

■ *Démonstration*

On a :

$$AB^2+AC^2=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})^2+(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC})^2$$
$$=(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})^2+(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB})^2\ (\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IB}\text{ car I milieu de [BC]})$$
$$=\left[AI^2+IB^2+2\times(\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB})\right]+\left[AI^2+IB^2-2\times(\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB})\right]$$
$$=2\times AI^2+2\times IB^2=2AI^2+2\times\left(\frac{BC}{2}\right)^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}.$$

d) Équation d'une droite du plan en repère orthonormé

Droite $\mathcal{D}$

- équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$

  $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

- si $b \neq 0$, équation réduite du type : $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

Définition

Un **vecteur normal** à une droite $\mathcal{D}$ est un vecteur *non nul* orthogonal aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$.

Propriété

Le plan étant muni d'un repère *orthonormé* $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$, si une droite $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Réciproquement, si une droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors $\mathcal{D}$ admet une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$.

C Perspective cavalière

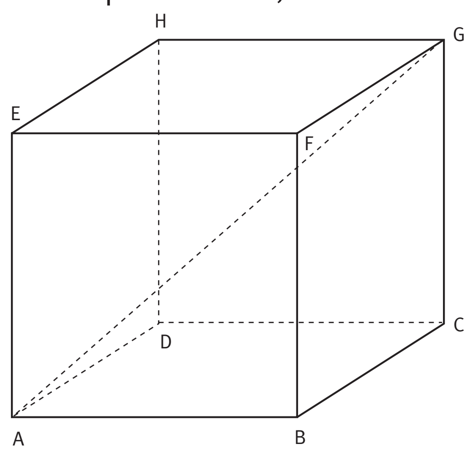
On désire représenter une figure de l'espace. Pour cela, on se donne un plan $\mathcal{P}$ (qui correspond au plan sur lequel on représente l'objet) et une droite $\mathcal{D}$ de ce plan.

Alors, on définit :

– les **plans frontaux** : ce sont les plans parallèles à $\mathcal{P}$;

– les **droites horizontales** : ce sont les droites parallèles à $\mathcal{D}$;

– les **fuyantes** : ce sont les droites perpendiculaires à $\mathcal{P}$.



Par exemple, si ABCDEFGH est un cube, si (ABF) est un plan frontal et si (EF) est horizontale alors :

– le plan (CDG) est un plan frontal ;

– les droites (AB), (CD) et (GH) sont horizontales ;

– les droites (AD), (BC), (EH) et (FG) sont des fuyantes.

Les règles de la perspective cavalière sont les suivantes.

Définition

- Les objets des plans frontaux sont représentés en vraie grandeur.
- Les fuyantes sont représentées par des droites faisant toutes le même angle avec les droites horizontales, cet angle est l'angle de fuite de la perspective ($\widehat{FEH}$ ci-dessus).
- Sur les fuyantes, les longueurs sont réduites (ou agrandies) dans un même rapport, ce rapport est le coefficient de réduction de la perspective (ci-dessus, le coefficient de réduction est : $\frac{EH}{EF}$).

Propriétés

- Trois points alignés sont représentés par trois points alignés.
- Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.
- Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.

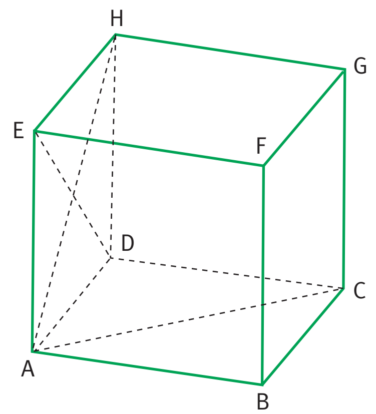
On dit que la perspective cavalière conserve l'alignement, le milieu et le parallélisme.

D Géométrie dans l'espace

1. Position relative de deux droites

Deux droites de l'espace peuvent être :

- coplanaires (dans un même plan)
  - parallèles
    - confondues : $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$
    - strictement parallèles (comme par exemple (DC) et (AB))
  - sécantes
    - perpendiculaires (comme par exemple (ED) et (AH))
    - quelconques (comme par exemple (HD) et (AH))
- non coplanaires (comme par exemple (EH) et (AC))



Remarque Dans l'espace, deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles.

Définition

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de l'espace sont parallèles si elles vérifient les deux conditions suivantes :

- elles sont *coplanaires* ;
- elles sont confondues ou n'ont aucun point commun.

On note : $\mathcal{D} \,//\, \mathcal{D}'$.

Propriétés

- Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.
- Il n'existe qu'une seule droite parallèle à une droite donnée et passant par un point extérieur à cette droite.

2. Les positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan, on peut avoir :

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles

- $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$: la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ (ex., dans le cube ABCDEFGH : $(AC) \subset (ABC)$) ;
- $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \varnothing$: $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point commun (1) (ex. : $(AC) \cap (EFG) = \varnothing$) ;
- $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\}$: $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ se coupent en un point (ex. : $(ED) \cap (ABC) = \{D\}$).

3. Les positions relatives de deux plans

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans, on peut avoir :

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ confondus : $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$;
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ strictement parallèles : $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \varnothing$;
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants *suivant une droite* Δ : $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta$.

Propriétés

- Si deux plans distincts de l'espace ont un point commun, ils ont exactement une droite commune passant par ce point.
- Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ alors toute droite parallèle à $\mathcal{D}$ est parallèle à tout plan parallèle à $\mathcal{P}$.
- Il n'existe qu'un seul plan parallèle à un plan donné et passant par un point donné.
- Si un plan est parallèle à deux plans distincts alors les trois plans sont parallèles entre eux.

Théorème

Si un plan $\mathcal{P}$ contient deux droites sécantes et parallèles à un plan $\mathcal{P}'$ alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

E Sections planes du cube

1. Propriétés utiles pour déterminer l'intersection de deux plans quand ils sont sécants suivant une droite

Propriété

Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$, tout plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}$ et coupant $\mathcal{P}$ le coupe suivant une parallèle à $\mathcal{D}$.

Propriété *Théorème du toit*

Soit deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles. Lorsqu'un plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ est sécant à un plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}'$, leur droite d'intersection Δ est parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

Remarque La démonstration de ce théorème est rappelée au chapitre 2.

Propriété

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

À retenir

Méthode pour déterminer l'intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants selon une droite $\mathcal{D}$.

– On trouve deux points A et B distincts appartenant tous deux à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Alors : $\mathcal{D} = (AB)$.

– On trouve un point A commun aux deux plans et une droite Δ de l'un parallèle à l'autre. Alors $\mathcal{D}$ est la parallèle à Δ passant par A.

– On trouve un point A commun aux deux plans et une droite Δ intersection de $\mathcal{P}$ et d'un plan parallèle à $\mathcal{P}'$. Alors $\mathcal{D}$ est la parallèle à Δ passant par A.

2. Intersection d'une droite et d'un plan

À retenir

Méthode pour déterminer l'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un plan $\mathcal{P}$.

– On trouve une droite Δ de $\mathcal{P}$ coplanaire et sécante avec $\mathcal{D}$.

Alors : $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D} \cap \Delta$.

– *(Méthode du plan auxiliaire)* On trouve un plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}$ puis on détermine l'intersection (c'est une droite Δ) des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Alors : $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D} \cap \Delta$.

– On trouve un plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}$ puis on détermine l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ (c'est une droite Δ). On a alors : $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D} \cap \Delta$.

2 Calculs vectoriels dans l'espace

A Objectifs du chapitre

On se propose de généraliser à l'espace la notion de vecteurs. En particulier, on montre en Première que tout vecteur peut s'écrire à partir de *deux vecteurs* non colinéaires. Nous verrons que, dans l'espace, tout vecteur peut s'écrire à partir de *trois* vecteurs non coplanaires.

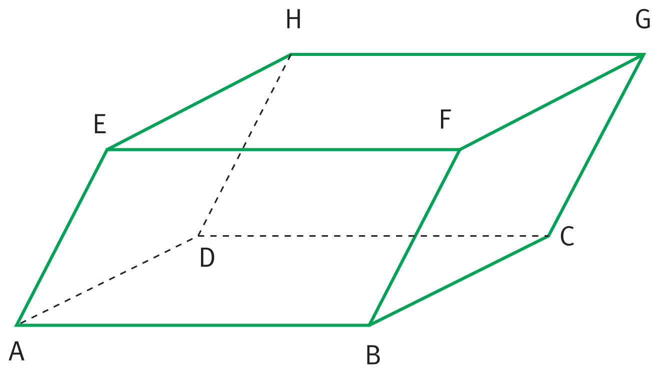
À partir de ces résultats, nous pourrons introduire un repère de l'espace. Ce moyen de repérage nous sera utile pour étudier « algébriquement » différentes intersections.

B Pour débuter

■ Activité 1

Rappelons que, dans le plan, deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux si et seulement si ABCD est un parallélogramme.

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède (c'est-à-dire un solide de l'espace ayant six faces, les faces opposées étant parallèles deux à deux).



❶ Quelle est la nature de chacune des faces du parallélépipède ?

❷ On considère les couples de points (A, B), (D, C), (H, G), (E, F). Que peut-on dire :

a) des droites (AB), (DC), (HG), (EF) ?

b) des sens A vers B, D vers C, H vers G, E vers F ?

c) des longueurs AB, DC, HG, EF ?

d) des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ dans le plan (ABC) ?

e) des vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{HG}$ du plan (DCG) ?

❸ Pourquoi les points A, B, G et H sont-ils coplanaires ?

Démontrer que, dans le plan qui contient ces points, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux.

❹ Trouver de même des vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AE}$.

❺ Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont égaux.

❻ Que dire de $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$? de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$?

C Cours

1. Vecteurs de l'espace

a) Définition

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.

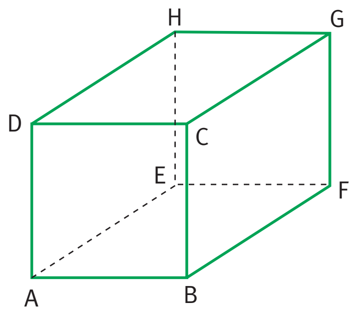
Dans l'espace, comme dans le plan, étant donné quatre points A, B, C et D, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si la translation qui transforme A en B transforme C en D, ce qui revient à dire que ABDC est un parallélogramme ou encore, si $A \neq B$ et $C \neq D$, que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction : (AB) // (CD) ;
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même sens ;
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même norme : AB = CD.

▶ Exemple

Si ABCDEFGH est un parallélépipède (encore appelé pavé) alors :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{EF}.$$



Propriété 1

Pour tout point A de l'espace et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M de l'espace tel que : $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

On retiendra que les règles de calculs sont les mêmes que dans le plan : addition, relation de Chasles, vecteur nul, multiplication d'un vecteur par un réel…

▶ Exemple

Si ABCDEFGH est un parallélépipède, alors : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

b) Colinéarité

Définition 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Définition 2

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

On déduit des résultats de calculs vectoriels de géométrie plane les deux propriétés suivantes.

Propriété 2

Soit $\mathcal{D}$ une droite, $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ un vecteur non nul. Alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété 3

- Soit A, B, C et D quatre points distincts, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Soit A, B et C trois points distincts, les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2. Vecteurs coplanaires

Définition 3

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Soit O un point quelconque et les points A, B et C définis par :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u},\ \overrightarrow{OB} = \vec{v} \text{ et } \overrightarrow{OC} = \vec{w}.$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si O, A, B et C sont coplanaires.

Remarque Si deux des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires alors les trois vecteurs sont coplanaires.

▶ Exemple 1 Dans le cube ABCDEFGH, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires dans les cas suivants ?

❶ On a : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{EG}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{FH}$.

❷ On a : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{DG}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{DH}$.

▶ **Solution**

❶ On a : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AI}$ où I est le point de (CD) tel que D est le milieu de [IC]. Les points A, B, C et I sont coplanaires (ils appartiennent au plan (ABC)) donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

❷ On a : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\vec{v}=\overrightarrow{DG}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{DH}$. Les points D, C, G et H sont coplanaires donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Propriété 4

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

■ *Démonstration*

Soit O un point de l'espace. On définit les points A, B et C tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$.

- Supposons qu'il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

Alors on a $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$. Considérons les points A′ et B′ définis par : $\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}$.

Les points O, A et A′ (resp. O, B et B′) sont alignés donc A′ (resp. B′) appartient au plan (OAB).

De plus, on a : $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$ ce qui prouve que OA′CB′ est un parallélogramme. Ainsi le point C appartient au plan (OA′B′), c'est-à-dire au plan (OAB). Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

- Réciproquement, supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les points O, A et B ne sont pas alignés et définissent donc un plan $\mathcal{P}$ dont $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère. Le point C appartient à $\mathcal{P}$. Notons $(x\,;y)$ ses coordonnées dans le repère $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$. On a donc $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ et ainsi $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

▶ **Conséquence**

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. Ces quatre points sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que : $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

Considérons un plan $\mathcal{P}$.

Soit A un point de $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *non colinéaires* de directions parallèles à $\mathcal{P}$.

Soit B et C tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Comme les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés et comme les directions de ces deux vecteurs sont parallèles à $\mathcal{P}$, les points B et C appartiennent à $\mathcal{P}$ et donc $\mathcal{P} = (ABC)$.

Soit M un point de l'espace, on a donc :

$$
\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \text{A, B, C et M coplanaires} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe deux réels } x \text{ et } y \text{ tels que : } \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe deux réels } x \text{ et } y \text{ tels que : } \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}.
\end{aligned}
$$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété 5

Un plan est caractérisé par un point et par deux vecteurs non colinéaires.

Si A est un point du plan $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de directions respectives parallèles à $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace définis par $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où x et y sont réels.

On note $\mathcal{P} = \left(A\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

▶ Exemple 2

Les points A, B, C, D et E vérifient $2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ · Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

▶ **Solution**

De l'égalité $2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$

on déduit $2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EA} + 4\,\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{EA} - 5\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EA} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

soit $4\,\overrightarrow{AB} - 5\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ ou encore $\overrightarrow{AD} = 4\,\overrightarrow{AB} - 5\,\overrightarrow{AC}$ · Cette dernière égalité nous prouve bien que A, B, C et D sont coplanaires.

Rappelons la propriété suivante.

Si un plan $\mathcal{P}$ contient deux droites sécantes et parallèles à un plan $\mathcal{P}'$ alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

On déduit de cette propriété la propriété suivante.

Propriété 6

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A et B deux points de l'espace. Les plans $\left(A\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$ et $\left(B\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$ sont parallèles.

Application *Démonstration du théorème du toit*

Rappelons l'énoncé du théorème.

Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ trois plans, deux à deux sécants.

On note : $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'' = \mathcal{D}$, $\mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' = \mathcal{D}'$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta$.

Alors si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, Δ est parallèle à chacune de ces deux droites.

Démontrons ce résultat.
Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, c'est donc aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$.

Comme la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$, le vecteur $\vec{u}$ a une direction parallèle à $\mathcal{P}$. Considérons un vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$ et de direction parallèle à $\mathcal{P}$. Si A est un point de $\mathcal{P}$, on peut donc écrire $\mathcal{P} = \left(\mathrm{A}\,;\vec{u},\ \vec{v}\right)$.

De la même façon, il existe un point B et un vecteur $\vec{v'}$ tel que $\mathcal{P}' = \left(\mathrm{B}\,;\vec{u},\ \vec{v'}\right)$.

Soit C un point de Δ. Ce point appartient donc aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Ainsi la droite passant par C de vecteur directeur $\vec{u}$ est incluse dans les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Autrement dit la droite passant par C de vecteur directeur $\vec{u}$ est Δ.

La droite Δ a donc pour vecteur directeur $\vec{u}$, ce qui prouve qu'elle est parallèle aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

3. Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires

Théorème 1

Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un *unique* triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

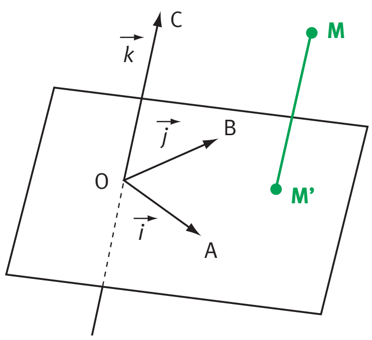
Démonstration

- Existence

Prouvons tout d'abord qu'il existe un triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Soit O un point du plan et A, B, C et M tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires : O, A et B définissent un plan. La droite (OC) et le plan (OAB) sont sécants.



Ainsi, la parallèle à (OC) passant par M coupe le plan (OAB). On note M' le point d'intersection.

Le point M′ appartient à (OAB) donc les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont coplanaires et, d'après la propriété 5 ($\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'étant pas colinéaires), il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

De plus, (MM′) et (OC) sont parallèles donc les vecteurs $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\overrightarrow{OC}$. On en déduit :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

- Unicité

Prouvons qu'il n'existe qu'un seul triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Supposons que $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ sont deux triplets qui conviennent.

On a : $\vec{u} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{u} = x'\vec{i}+y\vec{j}+z'\vec{k}$.

Alors : $(x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} + (z-z')\vec{k} = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$.

Supposons par exemple que $z \neq z'$.

Alors on a : $\vec{k} = -\dfrac{x-x'}{z-z'}\vec{i} - \dfrac{y-y'}{z-z'}\vec{j}$, ce qui contredit le fait que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires. Cette contradiction nous montre que : $z = z'$.

De même : $x = x'$ et $y = y'$.

Il ne peut donc y avoir deux (ou plus) triplets vérifiant l'égalité.

Compléments

Les notions abordées précédemment constituent les fondements de l'**algèbre linéaire** très largement développés dans l'enseignement supérieur.

- Lorsque trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, aucun de ces trois vecteurs n'est combinaison linéaire des deux autres (par exemple, on ne peut pas trouver deux réels x et y tels que $\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j}$), on dit que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une famille **libre**. De la même façon, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on dit que $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est une famille libre.
- Lorsque trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, tout vecteur $\vec{w}$ de l'espace est combinaison linéaire de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. On dit que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une famille **génératrice** de l'espace. De la même façon, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on dit que $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est une famille génératrice du plan.
- Une **base** est une famille à la fois libre et génératrice. Toutes les bases de l'espace contiennent trois éléments non coplanaires (c'est pour cela que l'on parle de dimension 3) et toutes les bases du plan contiennent deux éléments non colinéaires (d'où la dimension 2).

Définition 4

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.

- On dit que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base de l'espace.
- Considérons l'unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les trois réels x, y et z sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Propriété 7

Soit $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et k un réel alors :

- $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x'\,;y+y'\,;z+z')$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$;
- $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(k\times x\,;k\times y\,;k\times z)$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$;
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ sont proportionnels.

▶ Exemple 3

Étudier la coplanarité des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans les cas suivants.

❶ $\vec{u}(1\,;1\,;-1)$, $\vec{v}(0\,;1\,;2)$ et $\vec{w}(1\,;0\,;3)$.

❷ $\vec{u}(1\,;1\,;-1)$, $\vec{v}(0\,;1\,;2)$ et $\vec{w}(2\,;3\,;0)$.

▶ **Solution**

❶ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car $(1\,;1\,;-1)$ et $(0\,;1\,;2)$ ne sont pas proportionnels donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$. On a :

$$\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=x \\ 0=x+y \\ 3=-x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ 3=-3 \end{cases}.$$

Ce système n'admet donc pas de solution, ce qui prouve que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

❷ On remarque (on peut aussi procéder comme précédemment) que : $\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires.

4. Repères de l'espace

Définition 5

On dit que $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires donc si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de l'espace.

Définition 6

Soit $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

Les trois réels x, y et z sont les coordonnées de M dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ (x : abscisse, y : ordonnée et z : côte).

Remarques

- Tous les triplets de réels désignent des coordonnées de points et deux points différents ne peuvent avoir les mêmes coordonnées.
- Les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ sont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ de M dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
- On dit aussi que $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Propriété 8

- Pour tous $A\left(x_A\,;y_A\,;z_A\right)$, $B\left(x_B\,;y_B\,;z_B\right)$ de l'espace, le milieu I de [AB] a pour coordonnées
$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\,;\frac{z_A+z_B}{2}\right).$$
- Pour tous $A\left(x_A\,;y_A\,;z_A\right)$, $B\left(x_B\,;y_B\,;z_B\right)$ de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées
$$\left(x_B-x_A\,;y_B-y_A\,;z_B-z_A\right).$$

Démonstration

- On a pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)$ (il peut être utile de retenir cette égalité !). En effet :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}&=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\&=2\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}=2\overrightarrow{MI}\ \text{ (I milieu de [AB]).}\end{aligned}$$

On en déduit (pour M = O) : $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ et donc

$$\begin{aligned}x_I\vec{i}+y_I\vec{j}+z_I\vec{k}&=\frac{1}{2}\left[\left(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k}\right)+\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}\right)\right]\\&=\frac{x_A+x_B}{2}\vec{i}+\frac{y_A+y_B}{2}\vec{j}+\frac{z_A+z_B}{2}\vec{k}\end{aligned}$$

ce qui prouve bien la propriété.

- On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}\right)-\left(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k}\right)$
$$=\left(x_B-x_A\right)\vec{i}+\left(y_B-y_A\right)\vec{j}+\left(z_B-z_A\right)\vec{k}.$$

▶ Exemple 4 Montrer que les points $A(-1\,;\,0\,;\,2)$, $B(2\,;\,2\,;\,-1)$ et $C(8\,;\,6\,;\,-7)$ sont alignés.

▶ **Solution** On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\6\\-9\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

($\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$) donc A, B et C sont alignés.

5. Représentation paramétrique d'un plan

Soit $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires.

Le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent donc un plan $\mathcal{P}$. On a :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \text{il existe deux réels } \lambda \text{ et } \mu \text{ tels que : } \overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe deux réels } \lambda \text{ et } \mu \text{ tels que : } \begin{cases} x-x_A=\lambda a+\mu a' \\ y-y_A=\lambda b+\mu b' \\ z-z_A=\lambda c+\mu c' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe deux réels } \lambda \text{ et } \mu \text{ tels que : } \begin{cases} x=x_A+\lambda a+\mu a' \\ y=y_A+\lambda b+\mu b'. \\ z=z_A+\lambda c+\mu c' \end{cases}$$

Définition 7

On dit que $\begin{cases} x=x_A+\lambda a+\mu a' \\ y=y_A+\lambda b+\mu b',\ \lambda\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R} \\ z=z_A+\lambda c+\mu c' \end{cases}$ est une représentation paramétrique du plan $(A\,;\vec{u},\vec{v})$.

Remarques

- À chaque valeur des paramètres λ et μ correspond un point et réciproquement (exemple : à $\lambda=\mu=0$ correspond le point A).
- Un plan admet une infinité de représentations paramétriques.

▶ Exemple 5 Les représentations paramétriques ci-dessous définissent-elles un plan ? Si oui, donner les coordonnées d'un point du plan et de deux vecteurs non colinéaires dirigeant le plan.

❶ $\begin{cases} x=5+2\lambda-6\mu \\ y=-3\lambda+9\mu \\ z=3+\lambda-2\mu \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R}$

❷ $\begin{cases} x=7+2\lambda-6\mu \\ y=-3\lambda+9\mu \\ z=-1+\lambda-3\mu \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R},\ \mu\in\mathbb{R}$

▸ **Solution**

❶ Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc le système caractérise le plan $(A\,;\vec{u},\,\vec{v})$ où A(5 ; 0 ; 3) (pour $\lambda=\mu=0$) et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dirigeant le plan.

❷ Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\9\\-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires ($\vec{v}=-3\vec{u}$) donc le système

$$\begin{cases} x=7+2\lambda-6\mu \\ y=-3\lambda+9\mu \\ z=-1+\lambda-3\mu \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R},\mu\in\mathbb{R}$$ ne caractérise pas un plan.

6. Représentation paramétrique d'une droite

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace passant par A (x_A ; y_A ; z_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \text{Il existe } k \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM}=k\vec{u} \\ &\Leftrightarrow \text{Il existe } k \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x-x_A=ka \\ y-y_A=kb \\ z-z_A=kc \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \text{Il existe } k \text{ de } \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x=x_A+ka \\ y=y_A+kb. \\ z=z_A+kc \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 8

Le système $\mathcal{S}$ $\begin{cases} x=x_A+ka \\ y=y_A+kb, \\ z=z_A+kc \end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Remarques

- À chaque valeur du paramètre k correspond un point et réciproquement (ex. : à $k=0$ correspond le point A).
- Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

▶ Exemple 6 *Savoir donner la représentation paramétrique d'une droite*

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère A(1 ; 2 ; 0) et $B(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

❶ Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

❷ Le point C (1 ; 5 ; 6) appartient-il à (AB) ?

❸ Trouver un point de (AB) distinct de A et B.

❹ Déterminer l'intersection de (AB) avec le plan $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

▶ **Solution**

❶ On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\0-2\\2-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$. On a alors $\overrightarrow{AB}=-2\vec{n}$ où $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (AB) et cette droite est caractérisée par la représentation paramétrique : $\begin{cases}x=1+k\\y=2+k,\quad k\in\mathbb{R}.\\z=-k\end{cases}$

❷ Si C appartient à (AB) alors son paramètre k pour la précédente représentation paramétrique vérifie : $1+k=1$, $2+k=5$ et $-k=6$. Aucune valeur de k ne vérifie simultanément les trois égalités précédentes, donc : $C\notin(AB)$.

❸ Avec la précédente représentation paramétrique, A a pour paramètre 0 et B pour paramètre -2.

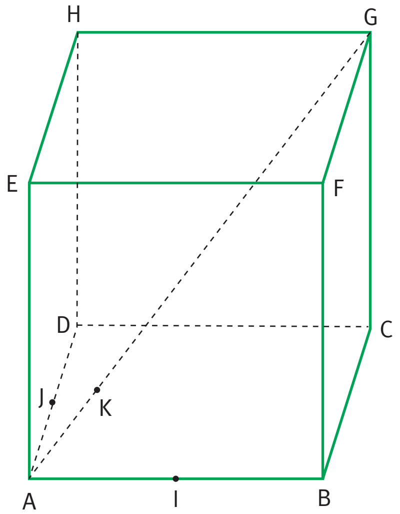
Pour $k=1$, on obtient le point $D(2\ ;\ 3\ ;\ -1)$.

❹ Le plan $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ est l'ensemble des points dont la côte est nulle. Le point de (AB) de paramètre k pour la précédente représentation est donc sur $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ si et seulement si $-k=0$.

L'intersection de la droite (AB) et du plan $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ est donc le point A.

D Exercices d'apprentissage

Exercice 1 Soit ABCDEFGH un cube, I le milieu de [AB], J le milieu de [AD] et K défini par $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AG}$.



❶ Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EK}$ en fonction de $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$.

❷ En déduire que les points E, I, J et K sont coplanaires.

Exercice 2 Dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère $A(1\,;1\,;2)$, $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ et $C(0\,;2\,;0)$.

❶ Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

❷ Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

❸ Le point $D(3\,;\,-1\,;\,4)$ appartient-il à (ABC) ?

Exercice 3 Soit ABCD un tétraèdre. On considère les points I et J milieux respectifs de [AC] et [BD]. Les points P, Q, R et S sont définis par : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

On considère le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.

❶ Déterminer dans ce repère les coordonnées des points I, J, P, Q, R et S.

❷ Déterminer des représentations paramétriques des droites (PS), (QR) et (IJ).

❸ Montrer que ces trois droites sont concourantes.

3 Orthogonalité

A Objectifs du chapitre

On se propose de généraliser à l'espace, la notion d'angle droit.

B Pour débuter

■ Activité 2

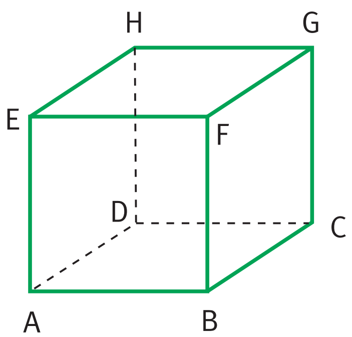
❶ Examinons le cube ci-contre.

La droite (AE) est parallèle à la droite (BF).

La droite (BF) est perpendiculaire à la droite (BC).

On dit que la droite (AE) est orthogonale à la droite (BC).

Remarque On peut aussi dire que la droite (BF) et la droite (BC) sont orthogonales.



Notation : *Pour exprimer que deux droites sont orthogonales, on utilise le même symbole que celui qui est utilisé pour exprimer que deux droites sont perpendiculaires.*

Par exemple, on écrit : $(AE) \perp (BC)$ *de même que* $(BF) \perp (BC)$.

Vrai/Faux ? (Justifier.)

a) Les droites (AE) et (BC) sont orthogonales.

b) Les droites (AE) et (GC) sont orthogonales.

c) Les droites (FE) et (GC) sont orthogonales.

d) Les droites (FE) et (HE) sont orthogonales.

e) Les droites (FE) et (FH) sont orthogonales.

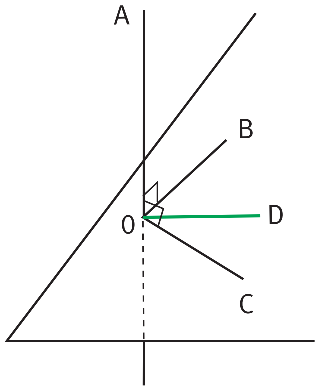
f) Les droites (FE) et (BD) sont orthogonales.

g) Les droites (FH) et (AC) sont orthogonales.

■ Activité 3

On considère quatre points non coplanaires de l'espace O, A, B et C. On suppose que, dans le plan (OAB), les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires et que, dans le plan (OAC), les droites (OA) et (OC) sont perpendiculaires.

On veut montrer que pour tout point D du plan (OAB) différent de O, les droites (OA) et (OD) sont perpendiculaires dans le plan (OAD).



Soit D un point du plan (OBC) n'appartenant ni à (OB), ni à (OC).

❶ Montrer qu'on peut choisir deux points P et Q tels que :

- $P \in (OB)$ et P différent de O ;
- $Q \in (OC)$ et Q différent de O ;
- $OP = OQ$;
- Les droites (PQ) et (OD) sont sécantes.

On note R l'intersection des droites (PQ) et (OD) et I le milieu de [PQ].

❷ Montrer que : $AP^2 + AQ^2 = 2AI^2 + \dfrac{PQ^2}{2}$.

❸ Montrer que : $OP^2 + OQ^2 = 2OI^2 + \dfrac{PQ^2}{2}$.

❹ En déduire que, dans le triangle (OAI), les droites (OA) et (OI) sont perpendiculaires.

❺ Montrer que : $OI^2 + IR^2 = IR^2$ et $AI^2 + IR^2 = AR^2$.

❻ En déduire que les droites (OA) et (OR) sont perpendiculaires dans le plan (OAR).

C Cours

1. Droites orthogonales

Définition 9

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont **orthogonales** si leurs parallèles respectives Δ et Δ' passant par un même point sont perpendiculaires. On note $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$.

Définition 10

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Soit A, B, C et D quatre points de l'espace tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si l'un des deux au moins est nul ou si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas forcément parallèles (ex. : dans le cube ABCDEFGH, on a : $(AB) \perp (AE)$, $(AC) \perp (AE)$ et pourtant (AB) et (AC) ne sont pas parallèles.

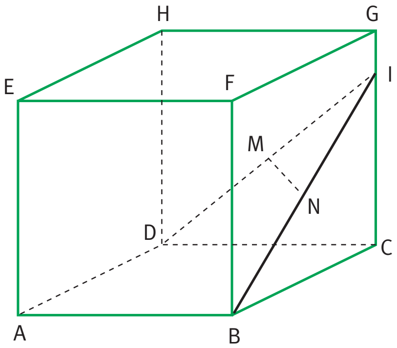
Remarque Deux droites perpendiculaires sont coplanaires alors que deux droites orthogonales ne sont pas forcément coplanaires (*donc perpendiculaire implique orthogonale mais orthogonale n'implique pas perpendiculaire*).

On déduit de la définition précédente et des propriétés de géométrie plane concernant les positions relatives de deux droites la propriété suivante.

Propriété 9

- Si deux droites sont orthogonales alors toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

▶ Exemple 7



Soit ABCDEFGH un cube.

Le point I est un point de l'arête [GC].

Les points M et N sont les milieux respectifs des segments [ID] et [IB].

Montrer que les droites (MN) et (AC), d'une part, (MN) et (EG), d'autre part, sont orthogonales.

▶ **Solution**

Les points M et N étant les milieux respectifs des segments [ID] et [IB], la droite (MN) est parallèle à la droite (BD) ; [BD] et [AC] sont les diagonales d'un carré donc les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires.

Ainsi les droites (MN) et (AC) sont orthogonales.

Or on sait que les droites (AC) et (EG) sont parallèles puisque AEGC est un rectangle.

On peut donc conclure que les droites (MN) et (GE) sont orthogonales.

2. Droite orthogonale à un plan

Définition 11

Une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à toutes les droites du plan $\mathcal{P}$. On note : $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$.

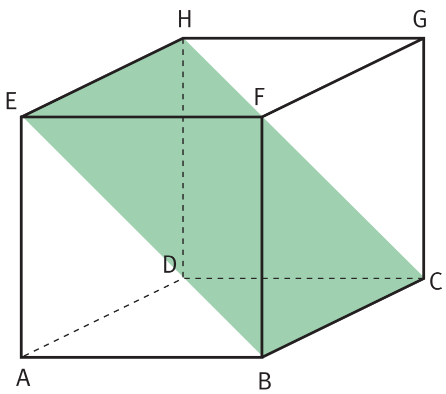
On peut déduire de l'activité 3 le théorème suivant.

Théorème 2

Si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$ alors elle est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Remarque

- Une démonstration de ce théorème est proposée à l'activité 3 de ce chapitre.



- Observer le cube ci-contre :

La droite (GC) est orthogonale aux deux droites (BC) et (EH) du plan $\mathcal{P}$ = (BCH).

Mais ces deux droites sont parallèles.

C'est pour cela que, conformément à ce que l'on voit, **on ne peut pas conclure** : (GC) $\perp \mathcal{P}$.

Donc, pour montrer qu'une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, il ne suffit pas de montrer que $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites de $\mathcal{P}$.

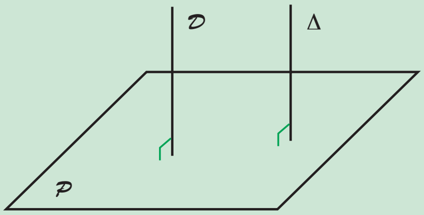
Il faut s'assurer que ces deux droites sont sécantes.

Il suffit donc qu'une droite soit orthogonale à deux droites sécantes d'un plan pour qu'elle soit orthogonale à ce plan.

Propriété 10 *(Admise)*

- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, elles sont parallèles.

$$\text{Si} \begin{cases} \mathcal{D} \perp \mathcal{P} \\ \text{et} \\ \Delta \perp \mathcal{P} \end{cases} \text{ alors } \mathcal{D} \,/\!/\, \Delta$$

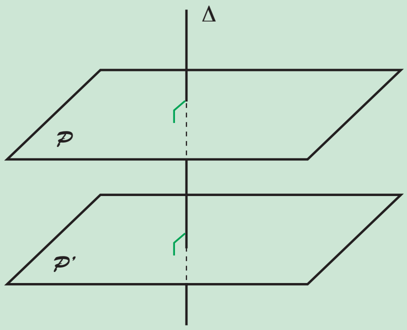


- Si deux droites sont parallèles, et si l'une est orthogonale à un plan, l'autre aussi.

$$\text{Si} \begin{cases} \mathcal{D} \,/\!/\, \Delta \\ \text{et} \\ \Delta \perp \mathcal{P} \end{cases} \text{ alors } \mathcal{D} \perp \mathcal{P}$$

- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, ils sont parallèles.

$$\text{Si} \begin{cases} \Delta \perp \mathcal{P} \\ \text{et} \\ \Delta \perp \mathcal{P}' \end{cases} \text{ alors } \mathcal{P} \,/\!/\, \mathcal{P}'$$



3. Plans perpendiculaires

Définition 12

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans. On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires et on note $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$ si l'un de ces plans contient une droite orthogonale à l'autre.

Propriété 11 admise

- Si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
- Si un plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à une droite $\mathcal{D}$ et est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}'$ alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

Deux plans perpendiculaires à un même troisième ne sont pas forcément parallèles (ex. : dans le cube (ABC)⊥(ABE), (ADE)⊥(ABE) et (ABC)⊥(ADE)).

4. Vocabulaire

- Deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes mais deux droites perpendiculaires sont sécantes.
- Deux vecteurs sont orthogonaux (on ne dit pas perpendiculaires) lorsque leurs directions respectives sont orthogonales.
- Dire qu'une droite est orthogonale à un plan ou dire qu'une droite est perpendiculaire à un plan signifie la même chose.
- Un vecteur non nul $\vec{n}$ **normal** à un plan $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

D Exercices d'apprentissage

Exercice 4 *Plan médiateur*

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

❶ Montrer que l'ensemble des points M équidistants de A et B (c'est-à-dire tels que MA = MB) est le plan orthogonal à (AB) passant par le milieu I de [AB].

Ce plan est le plan médiateur de [AB].

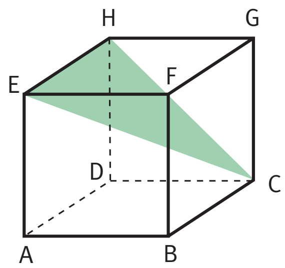
❷ Application

Soit ABCD un tétraèdre régulier (c'est-à-dire un polyèdre à 4 sommets dont les 6 arêtes sont de même longueur).

a) Montrer que A et B appartiennent au plan médiateur de [CD].

b) En déduire que deux arêtes opposées du tétraèdre sont orthogonales.

Exercice 5



ABCDEFGH est un cube.

a) Montrer que la droite (BG) est orthogonale au plan (CEF).

b) En déduire que les droites (BG) et (CE) sont orthogonales.

c) Démontrer que la droite (CE) est orthogonale au plan (BDG).

Exercice 6 Soit ABCD un tétraèdre régulier (c'est-à-dire un polyèdre à 4 sommets dont les 6 arêtes sont de même longueur), G le centre de gravité du triangle BCD et I le milieu de [CD].

1. Montrer que : $(CD)\perp(ABI)$.
2. En déduire que : $(AG)\perp(BCD)$.

4 Produit scalaire dans l'espace

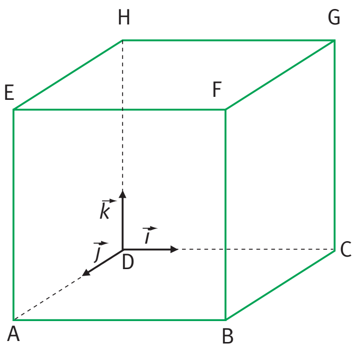
A Objectifs du chapitre

On se propose de généraliser à l'espace, la notion de produit scalaire. Les notions qui en découleront s'avéreront un outil efficace pour caractériser les plans dans un repère orthonormé.

B Pour débuter

■ Activité 4

Soit ABCDEFGH un cube de côté 3. On se place dans un repère orthonormé $\left(D\,;\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.



❶ Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G.

❷ a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Soit $\vec{u}(x\,;\,y\,;\,z)$. On définit I tel que : $\overrightarrow{BI}=\vec{u}$.

b) Déterminer les coordonnées de I.

c) Déterminer les longueurs AB, BI et AI.

d) En déduire que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\perp\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=0.$

❸ a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$. Soit $\vec{u}(x\,;\,y\,;\,z)$. On définit J tel que : $\overrightarrow{GJ}=\vec{u}$.

b) Déterminer les coordonnées de J.

c) Déterminer les longueurs AG, GJ et AJ.

d) En déduire que : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\perp\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ‹ $x-y+z=0.$

❹ On admet que cela se généralise et que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x ; y ; z) et (x' ; y' ; z') alors :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\perp\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0.$$

Donner deux caractérisations de l'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que : $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{AM}$.

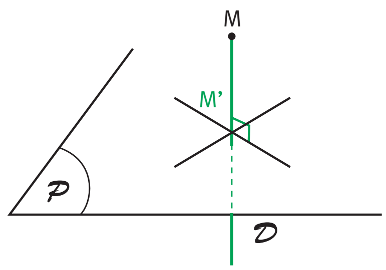
C Cours

1. Projection orthogonale dans l'espace

a) Projection orthogonale sur un plan

Définition 13

La droite $\mathcal{D}$ étant la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ passant par M et coupant $\mathcal{P}$ en M′, le point M′ est alors appelé projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.



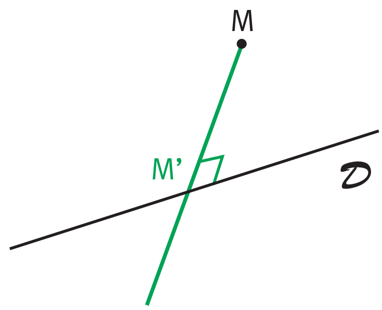
Le projeté orthogonal M′ de M sur $\mathcal{P}$ est donc défini par les deux conditions :

$$\begin{cases} M' \in \mathcal{P} \\ (MM') \perp \mathcal{P}. \end{cases}$$

b) Projection orthogonale sur une droite

Définition 14

Le plan $\mathcal{P}$ étant le plan orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ passant par M et coupant $\mathcal{D}$ en M′, le point M′ est alors appelé projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.



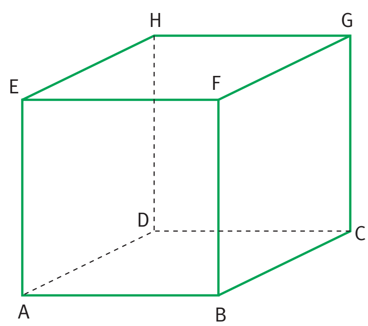
Le projeté orthogonal M′ de M sur $\mathcal{D}$ est donc défini par les deux conditions :

$$\begin{cases} M' \in \mathcal{D} \\ (MM') \perp \mathcal{D}. \end{cases}$$

▶ Exemple 8 Dans le cube ABCDEFGH, déterminer :

❶ le projeté orthogonal de F sur (DCH) ;

❷ le projeté orthogonal de C sur (EF).



▶ **Solution**

❶ La droite (FG) est orthogonale au plan (DCH) et le point G appartient à ce plan donc la droite orthogonale à (DCH) passant par F coupe ce plan en G. Autrement dit G est le projeté orthogonal de F sur (DCH).

❷ Le plan (FBC) est le plan orthogonal à (EF) passant par C. L'intersection de (FBC) et de (EF) est F donc le projeté orthogonal de C sur (EF) est F.

2. Définition

Définition 15

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les trois points A, B, C (il en existe un seul si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires).

Alors le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ *calculé dans le plan* $\mathcal{P}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Remarques

- On se ramène alors à un produit scalaire dans le plan.
- Le produit scalaire est indépendant du choix des points A, B, C car on déduit de la précédente définition et des résultats concernant le produit scalaire dans le plan que :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$
- On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ où $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur $\overrightarrow{AB}$.

▶ Exemple 9

Calculer dans le cube ABCDEFGH d'arête a :

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{HF}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{DC}$.

▶ **Solution**

On a :

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB}$ (car les vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont égaux)

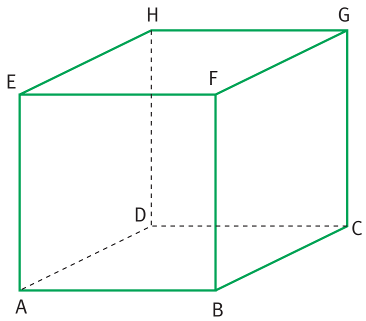
$= \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC}$ (car le projeté orthogonal de $\overrightarrow{DB}$ sur $\overrightarrow{DC}$ est $\overrightarrow{DC}$)

$= a^2$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DC}$ (car le projeté orthogonal de $\overrightarrow{FD}$ sur $\overrightarrow{DC}$ est $\overrightarrow{CD}$)

$= -a^2$.



3. Propriétés

Les propriétés suivantes se déduisent des propriétés du produit scalaire dans le plan.

Propriété 11

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et k réel :

- *commutativité* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- *linéarité* $\vec{u} \cdot \left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\left(k\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = k\times\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$;
- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\times\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + \left\|\vec{v}\right\|^2$.

Propriété 12

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Conséquence

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Des deux propriétés 11 et 12 découle une autre démonstration du théorème 2 énoncé au chapitre 3 de cette séquence.

Théorème 2

Si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$ alors elle est orthogonale à $\mathcal{P}$.

■ *Démonstration*

Soit $\mathcal{D}$ une droite, $\mathcal{P}$ un plan et Δ et Δ' deux droites sécantes de $\mathcal{P}$. On suppose que $\mathcal{D}$ et Δ (resp. $\mathcal{D}$ et Δ') sont orthogonales. On veut montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que $\mathcal{D}$ est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$.

Considérons une droite Δ'' du plan $\mathcal{P}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{v'}$ et $\vec{v''}$ sont des vecteurs directeurs de, respectivement, $\mathcal{D}$, Δ, Δ' et Δ''.

On a donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'} = 0$.

De plus, les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{v'}$ et $\vec{v''}$ sont coplanaires donc il existe deux réels x et y tels que $\vec{v''} = x\vec{v} + y\vec{v'}$. On en déduit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v''} = \vec{u} \cdot \left(x\vec{v} + y\vec{v'}\right) \overset{\text{linéarité}}{=} x\times\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) + y\times\left(\vec{u} \cdot \vec{v'}\right) = 0$$

ce qui prouve bien que Δ'' est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Conséquence

Soit $\mathcal{P}$ un plan défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{w}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$

4. Repère orthonormé, expression du produis scalaire

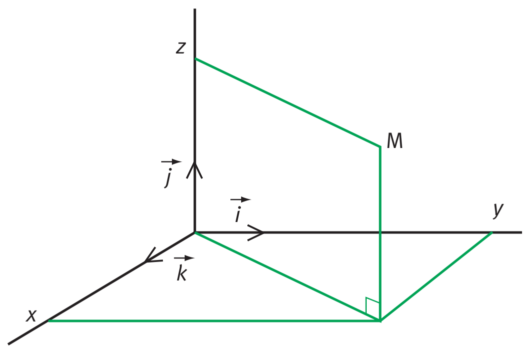
Définition 16

Un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est **orthonormé** si : $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$ et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\|\vec{k}\|=1$.

Remarque

- On utilise parfois le terme **orthonormal** à la place de orthonormé.
- Un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est **orthogonal** si : $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$.

On peut démontrer, grâce au théorème de Pythagore, la propriété suivante.



Propriété 13

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. Pour tout $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace, on a : $\text{OM}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

On en déduit la propriété suivante.

Propriété 14

Dans un repère orthonormé, pour tout vecteur $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et tous points $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ de l'espace :

a) $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

b) $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Propriété 15

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

■ *Démonstration*

Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $(x-x'\ ;\ y-y'\ ;\ z-z')$. On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)-\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-x^2-y^2-z^2-x'^2-y'^2-z'^2+2xx'+2yy'+2zz'\right]\\&=xx'+yy'+zz'.\end{aligned}$$

▶ Exemple 10

On considère, dans un repère orthonormé, les points $A(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$, $B(4\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et $C(2\ ;\ -2\ ;\ 0)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

▶ **Solution**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3-2-1=0$ ce qui prouve bien que ABC est rectangle en A.

▶ Exemple 11

Soit $A(3\ ;\ -2\ ;\ 1)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

❶ Montrer que $(A\ ;\vec{u},\vec{v})$ définit un plan $\mathcal{P}$.

❷ Déterminer une représentation de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par A.

▶ **Solution**

❶ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires car $(-1\ ;0\ ;2)$ et $(1\ ;1\ ;-2)$ ne sont pas proportionnelles donc $(A\ ;\vec{u},\vec{v})$ définit un plan $\mathcal{P}$.

❷ Considérons un vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ $((a\ ;b\ ;c)\neq(0\ ;0\ ;0))$. On a :

$$\vec{w}\perp\vec{u}\text{ et }\vec{w}\perp\vec{v}\ \text{ donc } -a+2c=0 \text{ et } a+b-2c=0.$$

Alors : $c=\dfrac{a}{2}$ et $b=2c-a=0$. Pour $a=2$, on a : $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. Ce vecteur est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc est orthogonal à $\mathcal{P}$. Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$. est donc un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. La droite $\mathcal{D}$ admet donc la représentation paramétrique

$$\begin{cases}x=3+2k\\y=-2\\z=1+k\end{cases},\ k\in\mathbb{R}.$$

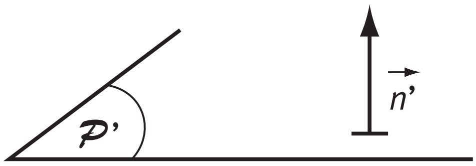
5. Vecteur normal à un plan

Rappel

Soit $\mathcal{P}$ un plan. Un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

▶ Conséquence

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ admettant respectivement comme vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.



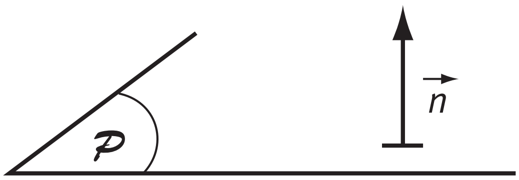
Propriété 16

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$. On a :

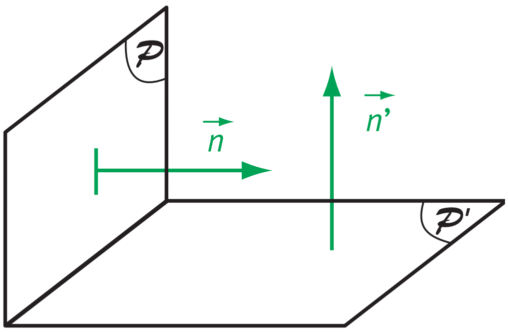
$$\mathcal{P} \perp \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'}.$$

■ *Démonstration*

- Supposons que $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$.



Il existe alors une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ orthogonale à $\mathcal{P}'$. Le vecteur $\vec{n'}$ est alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Comme $\vec{n'}$ est un vecteur directeur d'une droite incluse dans $\mathcal{P}$, il est orthogonal aux vecteurs normaux de $\mathcal{P}$ soit : $\vec{n} \perp \vec{n'}$.



- Supposons $\vec{n} \perp \vec{n'}$.

Comme $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux et différents de $\vec{0}$, ils ne sont pas colinéaires, ce qui prouve que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ se coupent selon une droite Δ. Soit A un point de Δ et B tel que : $\overrightarrow{AB} = \vec{n'}$.

On a : $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$ donc comme A est un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$, B est un point de $\mathcal{P}$. La droite (AB) est donc une droite de $\mathcal{P}$ orthogonale à $\mathcal{P}'$ puisqu'elle admet $\vec{n'}$ comme vecteur directeur. On a donc bien $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$.

6. Équation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormé

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Soit $M(x\,;y\,;z)$. On a :

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{P} &\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ &\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0\\ &\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0 \text{ où } d=-ax_A-by_A-cz_A. \end{aligned}$$

De plus, comme $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, c'est un vecteur non nul.

Autrement dit a, b et c ne sont pas tous trois nuls : $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$.

Propriété 17

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- Tout plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$.
- Réciproquement, si $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$, l'ensemble des points M $(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

▸ Exemple 10

❶ Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ passant par $A(3\,;1\,;-2)$.

❷ Le point $B(0\,;1\,;-2)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?

❸ Soit C $(1\,;1\,;1)$ et $D(3\,;4\,;0)$. Montrer que : $(DC)\perp\mathcal{P}$.

❹ Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}'$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par O et $E(0\,;2\,;-4)$.

▸ **Solution**

❶ Le plan $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $4x+6y-2z+d=0$.

Le point A appartient à $\mathcal{P}$ donc $4\times3+6\times1-2\times(-2)+d=0$ soit $d=-22$. Ainsi, $\mathcal{P}$ admet l'équation cartésienne

$$4x+6y-2z-22=0 \text{ soit } 2x+3y-z-11=0.$$

❷ On a : $4\times0+6\times1-2\times(-2)-22=-12\neq0$ donc $B\notin\mathcal{P}$.

③ On a : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3-1\\4-1\\0-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$. On en déduit $\vec{n}=2\overrightarrow{CD}$ et donc (DC) $\perp \mathcal{P}$.

④ Notons $ax+by+cz+d=0$ $((a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0))$ une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$. Le vecteur $\vec{n'}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal à $\mathcal{P}'$.

On a : $\mathcal{P}\perp\mathcal{P}'$ donc $\vec{n}\cdot\vec{n'}=0$. Ainsi : $4a+6b-2c=0$.

On a $O\in\mathcal{P}'$ donc $d=0$.

On a $E\in\mathcal{P}'$ donc $2b-4c=0$. Alors $b=2c$ et $4a=-6b+2c=-10c$.

Pour $c=2$, on a : $b=4$ et $a=-5$.

Le plan $\mathcal{P}'$ admet donc l'équation cartésienne : $-5x+4y+2z=0$.

Remarque Lorsque l'espace est muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ qui n'est pas forcément orthonormé, la formule donnant le produit scalaire : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ n'est plus vraie et toutes les propriétés liées à l'orthogonalité ne sont plus valides. En revanche, on a les propriétés suivantes.

- Si a, b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble des points M$(x\,;y\,;z)$ de l'espace tels que : $ax+by+cz+d=0$ est un plan (bien sûr, on ne peut pas parler, ici, de vecteur normal).
- Tout plan admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ où a, b et c ne sont pas tous les trois nuls.

D Exercices d'apprentissage

Exercice 7 Soit A et B deux points de l'espace tels que : AB = 6. On note I le milieu de [AB].

① Montrer que pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=IM^2-9$.

② En déduire l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$; b) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=16$.

Exercice 8 On considère une pyramide ABCDE à base carrée ABCD telle que :

- ABCD est un carré de côté 3 ;
- ABE et ADE sont rectangles en A ;
- EA = 4 ;
- F est le milieu de [BC].

❶ Déterminer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$; b) $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB}$; c) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BA}$.

❷ Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF}$ et en déduire une valeur arrondie au degré de l'angle $\widehat{AEF}$.

Exercice 9

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 2 ; 3), B(0 ; 1 ; 4), $C(-1\,;\,-3\,;\,2)$, $D(4\,;\,-2\,;\,5)$ et $E(-2\,;\,1\,;\,2)$ ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

❶ a) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan $\mathcal{P}$.

b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

c) Déterminer alors une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

❷ Démontrer que la droite (DE) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 10

❶ Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère $A(-1\,;\,0\,;\,3)$. Montrer que la sphère $\mathcal{S}$ de centre A et de rayon 2 admet comme équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x+6z+6=0$.

❷ Montrer que $x^2+y^2+z^2+4y-12z-9=0$ est l'équation cartésienne d'une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

5 Droites et plans de l'espace

On suppose, dans tout ce chapitre, *l'espace muni d'un repère orthonormé.*

A Objectifs du chapitre

On se propose, dans ce chapitre, d'étudier des problèmes d'intersection de droites et de plans, en choisissant un cadre adapté, vectoriel ou non, repéré ou non.

B Pour débuter

■ Activité 5 *Résolution de systèmes*

Partie I *Systèmes de 3 équations à 3 inconnues, méthode par substitution*

Considérons le système $\Sigma : \begin{cases} 2x+5y-z=11 & \text{L1} \\ 3x-2y+2z=15 & \text{L2} \\ x-3y+z=2 & \text{L3} \end{cases}$.

La ligne L1 permet d'écrire : $z = 2x+5y-11$. Substituons dans les lignes L2 et L3.

$$\Sigma : \begin{cases} z=2x+5y-11 \\ 3x-2y+2(2x+5y-11)=15 \\ x-3y+(2x+5y-11)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2x+5y-11 \\ \left.\begin{aligned} 7x+8y=37 \\ 3x+2y=13 \end{aligned}\right\} : \Sigma' \end{cases}$$

1. Résoudre le système Σ'.
2. En déduire les solutions du système Σ.
3. En utilisant la méthode précédente (dite méthode par substitution), résoudre le système :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=0 \end{cases}.$$

Partie II *Autres systèmes*

1. Résoudre le système $\Sigma : \begin{cases} t+1=2t'+1 \\ -t-2=2 \\ 3t=t' \end{cases}$.
2. Résoudre le système $\Sigma : \begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$.

C Cours

1. Intersection de deux plans

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans, $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ des vecteurs normaux de, respectivement, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. On s'intéresse à la position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

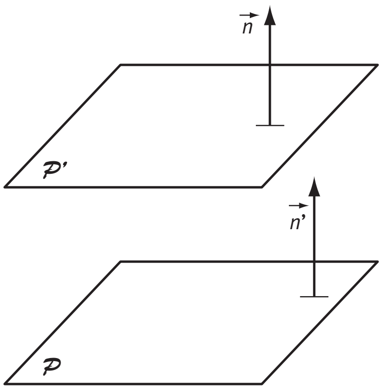
a) Point de vue géométrique

Cas $\boxed{1}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ strictement parallèles

$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \varnothing$

$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ colinéaires

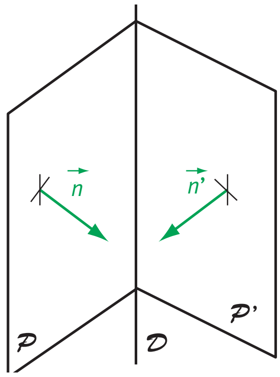


Cas $\boxed{2}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants

$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'' = \mathcal{D}$

$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ non colinéaires

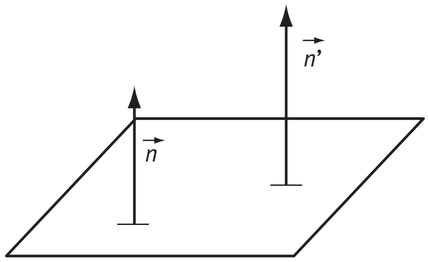


Cas $\boxed{3}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ confondus

$\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.

$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ colinéaires



b) Point de vue algébrique : plans définis par une équation cartésienne

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \text{ et } \mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Alors le système d'équations $\mathcal{S}$: $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ caractérise $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

Cas $\boxed{1}$ Les listes $(a\,;b\,;c)$ et $(a'\,;b'\,;c')$ sont proportionnelles et $(a\,;b\,;c\,;d)$ et $(a'\,;b'\,;c'\,;d')$ ne sont pas proportionnelles.
Alors il n'y a pas de triplets solutions de $\mathcal{S}$. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles.

Cas $\boxed{2}$ Les listes $(a\,;b\,;c\,;d)$ et $(a'\,;b'\,;c'\,;d')$ sont proportionnelles. Alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ et le système $\mathcal{S}$ admet alors une infinité de triplets solutions qui sont les coordonnées des points de $\mathcal{P}$.

Cas $\boxed{3}$ Les listes $(a\,;b\,;c)$ et $(a'\,;b'\,;c')$ ne sont pas proportionnelles.
Le système $\mathcal{S}$ caractérise une droite et admet une infinité de solutions. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.

Réciproquement, dans l'espace, toute droite est caractérisée par un système d'équations cartésiennes

$$\mathcal{S} : \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

où $(a\,;b\,;c)$ et $(a'\,;b'\,;c')$ non proportionnelles.

▶ Exemple 11 Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=3 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Déterminer un système d'équations cartésiennes caractérisant la droite $\mathcal{D}$.

▶ **Solution** On a les équivalences suivantes.

Il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x=-1+2y \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+1=0 \\ z=3 \end{cases}.$$

Ainsi, la droite $\mathcal{D}$ est caractérisée par le système $\mathcal{S} : \begin{cases} x-2y+1=0 \\ z=3 \end{cases}$.

Remarque Il n'y a pas unicité du système définissant une droite.

c) Point de vue algébrique : plans définis par un point et deux vecteurs non colinéaires

On considère deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ définis par :

$$\mathcal{P} = \left(A\,;\vec{u},\vec{v}\right) \text{ et } \mathcal{P}' = \left(B\,;\vec{u'},\vec{v'}\right)$$

où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (resp. $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$) ne sont pas colinéaires.

Cas $\boxed{1}$ Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires (c'est-à-dire $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u'}$ sont coplanaires ainsi que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$) et A n'appartient pas à $\mathcal{P}'$.

Alors il n'y a pas de triplets solutions de $\mathcal{S}$. On a : $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'=\varnothing$.

Cas $\boxed{2}$ Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires et A appartient à $\mathcal{P}'$.

Alors $\mathcal{P}=\mathcal{P}'$ et il y a une infinité de triplets solutions de $\mathcal{S}$. On a : $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'=\mathcal{P}$.

Cas $\boxed{3}$ Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas coplanaires, soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires.

Alors le système $\mathcal{S}$ caractérise une droite dont un vecteur directeur $\vec{w}$ vérifie les deux conditions :

- les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ;
- les vecteurs $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.

On admet la propriété suivante.

Propriété 18

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ quatre vecteurs tels que :

- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ;
- les vecteurs $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas colinéaires ;
- les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ ne sont pas coplanaires.

Soit un vecteur $\vec{w}$ tel que :

- les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ;
- les vecteurs $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Alors pour tous points M et N, les plans $\mathcal{P} = \left(M ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ et $\mathcal{Q} = \left(N ; \vec{u'}, \vec{v'}\right)$ sont sécants selon une droite dont $\vec{w}$ est un vecteur directeur.

d) Exemple

▶ Exemple 12

Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ les plans d'équations :

$$\mathcal{P} : 2x + 3y - z + 5 = 0 ; \mathcal{P}' : x + y + 1 = 0 \text{ et } \mathcal{P}'' : 4x + 6y - 2z + 5 = 0.$$

❶ Étudier les positions relatives de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$.

❷ Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite.

❸ Les deux plans sont-ils perpendiculaires ?

❹ Déterminer leur droite d'intersection.

▶ **Solution**

❶ Les listes (2 ; 3 ; –1) et (4 ; 6 ; –2) sont proportionnelles donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ sont parallèles.

Les listes (2 ; 3 ; –1 ; 5) et (4 ; 6 ; –2 ; 5) ne sont pas proportionnelles donc ces plans sont strictement parallèles.

❷ Les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux de, respectivement, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.

❸ On a : $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 2\times1 + 3\times1 - 1\times0 = 5 \neq 0$ donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas perpendiculaires.

❹ Prenons z comme paramètre. On cherche à exprimer x et y en fonction de z, on a :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y-z+5=0\\x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=z-5\\x+y=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=z-5\\2x+2y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=z-3\\x+y=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=z-3\\x=-1-(z-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=z-3\\x=-z+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } t\in\mathbb{R} \text{ tel que}\begin{cases}x=-t+2\\y=t-3\\z=t\end{cases}.$$

Ainsi l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases}x=2-t\\y=-3+t\\z=t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, c'est-à-dire la droite passant par $A(2\,;\,-3\,;\,0)$ et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

▶ Exemple 13

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

❶ Montrer que les vecteurs $\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas colinéaires.

❷ Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}=(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et $\mathcal{P}'=(O\,;\vec{i}+\vec{j},\vec{k})$.

▶ **Solution**

❶ Si les vecteurs $\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{k}$ étaient colinéaires alors ces vecteurs étant non nuls, il existerait un réel x tel que $\vec{k}=x(\vec{i}+\vec{j})=x\vec{i}+x\vec{j}$ et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ seraient coplanaires, ce qui est absurde puisque $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère. Ainsi $\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas colinéaires.

❷ On a :

$$\begin{cases}\vec{i} \text{ et } \vec{j} \text{ ne sont pas colinéaires ;}\\ \vec{i}+\vec{j} \text{ et } \vec{k} \text{ ne sont pas colinéaires ;}\\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{i}+\vec{j} \text{ et } \vec{k} \text{ ne sont pas coplanaires (car } \vec{i},\ \vec{j} \text{ et } \vec{k} \text{ ne le sont pas).}\end{cases}$$

donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$. Remarquons que le point O appartient aux deux plans donc appartient à $\mathcal{D}$.

De plus, le vecteur $\vec{i}+\vec{j}$ est tel que :

- les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{i}+\vec{j}$ sont coplanaires ;
- les vecteurs $\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{k}$ et $\vec{i}+\vec{j}$ sont coplanaires.

On en déduit que $\vec{i}+\vec{j}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Ainsi $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'$ est la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{i}+\vec{j}$.

2. Intersection d'une droite et d'un plan

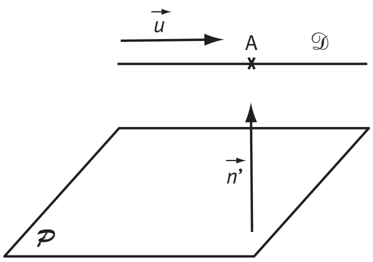
Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$, $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par un point A.

Cas $\boxed{1}$

$\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$

$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \varnothing$

$\vec{u} \perp \vec{n}$ et $A \notin \mathcal{P}$

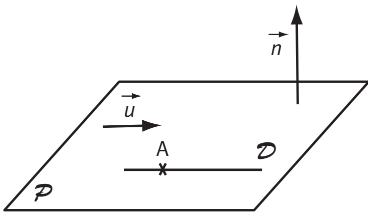


Cas $\boxed{2}$

$\mathcal{D}$ incluse dans $\mathcal{P}$

$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D}$

$\vec{u} \perp \vec{n}$ et $A \in \mathcal{P}$

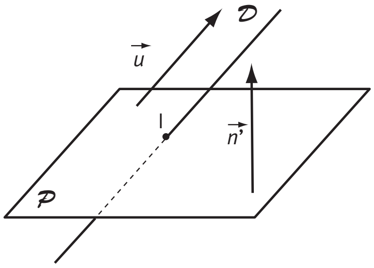


Cas $\boxed{3}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sécants

$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\}$

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux



▶ Exemple 14

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $5x + y - z + 3 = 0$, $\mathcal{D}$ la droite passant par A(0 ; 1 ; 3) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}'$ la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

❶ Étudier les positions relatives de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$ puis de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}'$.

❷ Déterminer les intersections correspondantes.

▶ **Solution**

❶ Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

On a : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 5 \times 1 + 1 \times (-6) - 1 \times (-1) = 0$ donc la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$. Le point A n'appartient pas à $\mathcal{P}$ $(5 \times 0 + 1 \times 1 - 1 \times 3 + 3 = 1 \neq 0)$ donc la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.

On a : $\vec{n} \cdot \vec{u'} = 5 \times 1 + 1 \times 0 - 1 \times 3 = 2 \neq 0$ donc la droite $\mathcal{D}'$ et le plan $\mathcal{P}$ se coupent en un point I.

❷ On a : $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \varnothing$.

Déterminons $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}'$.

La droite $\mathcal{D}'$ est caractérisée par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0 + k \\ y = 1 \\ z = 3 + 3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ Notons k le paramètre de I pour cette représentation :

$I(k\,;1\,;3+3k)$. Le point I appartient au plan $\mathcal{P}$ donc : $5\times k+1-(3+3k)+3=0$ soit $k=-\dfrac{1}{2}$.

Ainsi : $\mathcal{P}\cap\mathcal{D}'=I\left(-\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

▶ Exemple 15

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $A(2\,;1\,;0)$.

❶ Montrer que $\left(O\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$ définit un plan. On note $\mathcal{P}=\left(O\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

❷ Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ passant par A de vecteur directeur $\vec{w}$.

▶ **Solution**

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $\left(O\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$ définit bien un plan.

Le plan $\left(O\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$ admet la représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=t\\y=t+t', \quad t\in\mathbb{R},\ t'\in\mathbb{R}.\\z=t'\end{cases}$$

La droite $\mathcal{D}$ admet la représentation paramétrique $\begin{cases}x=k+2\\y=k+1\ , \quad k\in\mathbb{R}\\z=k\end{cases}$

On a :

$M(x\,;y\,;z)\in\mathcal{P}\cap\mathcal{D}\Leftrightarrow$ Il existe t, t' et k de $\mathbb{R}$ tels que $\begin{cases}x=t=k+2\\y=t+t'=k+1.\\z=t'=k\end{cases}$

Résolvons le système $\mathcal{S}$: $\begin{cases}t=k+2\\t+t'=k+1.\\t'=k\end{cases}$ On a :

$$\mathcal{S}\Leftrightarrow\begin{cases}t=k+2\\(k+2)+t'=k+1\\t'=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=k+2\\t'=-1\\t'=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t'=-1.\\k=-1\end{cases}$$

Ainsi, la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}$ en $I(1\,;0\,;-1)$.

D Exercices d'apprentissage

Exercice 11 Reconnaître l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M de l'espace dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 + \dfrac{t}{3} \\ z = -t + 6 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

Étudier la position relative de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 1 - t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 Soit $(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un repère orthonormal de l'espace.

1. Soit G l'isobarycentre des points A, B et C.
   - a) Donner les coordonnées du point G.
   - b) Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC) .
2. Les points A′(2 ; 0 ; 0), B′(0 ; 2; 0) et C′(0 ; 0 ; 3) définissent un plan A′B′C′.
   - a) Déterminer une équation cartésienne du plan (A′B′C′).
   - b) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AC).
   - c) Calculer alors les coordonnées du point commun K à la droite (AC) et au plan (A′B′C) .

Exercice 13 Soit ABCD un tétraèdre, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. On s'intéresse à l'intersection des plans (IJD) et (BCD).

1. *Point de vue géométrique*

   Montrer que (IJD) $\cap$ (BCD) est une droite Δ passant par D et parallèle aux droites (IJ) et (BC).

2. *Aspect algébrique*
   - a) Justifier que $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère.
   - b) Donner les coordonnées de A, B, C, D, I et J dans ce repère.
   - c) Déterminer une représentation cartésienne du plan (BCD).
   - d) Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJD).
   - e) En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.
   - f) Retrouver les résultats du 1.

6 Synthèse

A Synthèse de la séquence

1. Calculs vectoriels dans l'espace

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k (éventuellement nul) tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$.

Propriétés

- Soit A et B deux points distincts et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) si et seulement si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
- Soit A, B, C et D quatre points distincts, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Soit A, B et C trois points distincts, les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Soit O un point quelconque et les points A, B et C définis par :

$$\overrightarrow{OA}=\vec{u},\ \overrightarrow{OB}=\vec{v} \text{ et } \overrightarrow{OC}=\vec{w}.$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si O, A, B et C sont coplanaires.

Propriété

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
- Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. Ces quatre points sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que : $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
- Un plan est caractérisé par un point et par deux vecteurs non colinéaires : $\mathcal{P} = \left(A\,;\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A et B deux points de l'espace. Les plans $\left(A\,;\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$ et $\left(B\,;\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$ sont parallèles.

Théorème

Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un *unique* triplet $(x\,;y\,;z)$ de réels tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Définition

- Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace.
- On dit que $\left(\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ est une base de l'espace.
- Considérons l'unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les trois réels x, y et z sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$.
- On dit que $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ est un repère de l'espace si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires donc si $\left(\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ est une base.
- Soit $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Les trois réels x, y et z sont les coordonnées de M dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ (x : abscisse, y : ordonnée et z : côte).

Définition

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ non colinéaires.

- On dit que $\begin{cases} x = x_A + \lambda a + \mu a' \\ y = y_A + \lambda b + \mu b' \\ z = z_A + \lambda c + \mu c' \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du plan $\left(A\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.
- Le système $\mathcal{S}$ $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ est un système d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ (on dit aussi que $\mathcal{S}$ est une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

3. Orthogonalité

Définitions et vocabulaire

- Deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes mais deux droites perpendiculaires sont sécantes.
- Deux vecteurs sont orthogonaux (on ne dit pas perpendiculaires) lorsque leurs directions respectives sont orthogonales.
- Dire qu'une droite est orthogonale ou perpendiculaire à un plan signifie la même chose.
- Un vecteur non nul $\vec{n}$ **normal** à un plan $\mathcal{P}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

Propriétés

- Si deux droites sont orthogonales alors toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

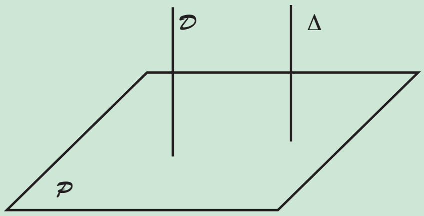
Théorème

Si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$ alors elle est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Propriété

- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, elles sont parallèles.

Si $\begin{cases} \mathcal{D} \perp \mathcal{P} \\ \text{et} \\ \Delta \perp \mathcal{P} \end{cases}$ alors $\mathcal{D} \,/\!/\, \Delta$

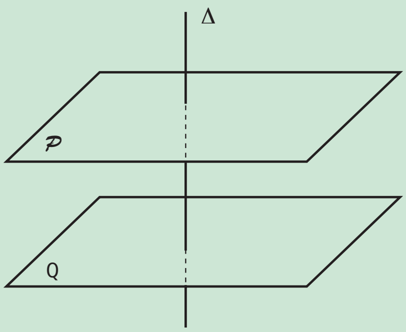


- Si deux droites sont parallèles et si l'une est orthogonale à un plan, l'autre aussi.

Si $\begin{cases} \mathcal{D} \,/\!/\, \Delta \\ \text{et} \\ \Delta \perp \mathcal{P} \end{cases}$ alors $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$

- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, ils sont parallèles.

Si $\begin{cases} \Delta \perp \mathcal{P} \\ \text{et} \\ \Delta \perp \mathcal{P}' \end{cases}$ alors $\mathcal{P} \,/\!/\, \mathcal{P}'$



Propriétés

- Si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
- Si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à une droite $\mathcal{D}'$ et est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

3. Produit scalaire dans l'espace

Définition

- La droite $\mathcal{D}$ étant la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}$ passant par M et coupant $\mathcal{P}$ en M′, le point M′ est alors appelé projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
- Le plan $\mathcal{P}$ étant le plan orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ passant par M et coupant $\mathcal{D}$ en M′, le point M′ est alors appelé projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Définition

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B, C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Avec une projection orthogonale : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.
- Avec cosinus et l'angle de vecteurs : (si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$.
- Avec la norme uniquement

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right].$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right].$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} \times \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right].$$

- Expression analytique dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et k réel :

- *commutativité* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- *linéarité* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2$.

Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

▶ **Conséquence** Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriétés

- On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. Pour tout $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace, on a $\mathrm{OM}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Dans un repère orthonormé, pour tout vecteur $\vec{u}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et tous points $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\ ;\ y_\mathrm{A}\ ;\ z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\ ;\ y_\mathrm{B}\ ;\ z_\mathrm{B})$ de l'espace :

  a) $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

  b) $\mathrm{AB}=\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|=\sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2}$.

Propriété

On se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- Tout plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$ avec $(a\ ;b\ ;c)\neq(0\ ;0\ ;0)$.
- Réciproquement, si $(a\ ;b\ ;c)\neq(0\ ;0\ ;0)$, l'ensemble des points M $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

4. Intersection de deux plans

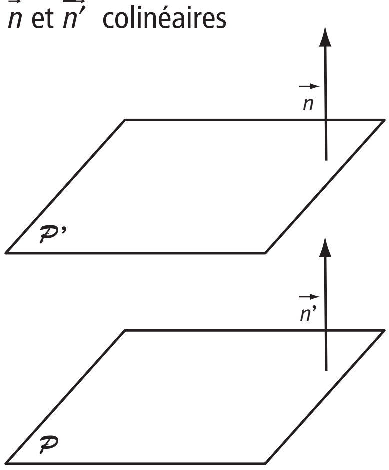
a) Intersection de deux plans

Cas $\boxed{1}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ strictement parallèles

$\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'=\varnothing$

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires

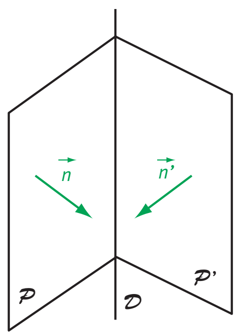


Cas $\boxed{2}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants

$\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'=\mathcal{D}$

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ non colinéaires

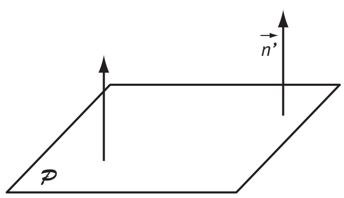


Cas $\boxed{3}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ confondus

$\mathcal{P}=\mathcal{P}'$.

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ colinéaires



Notons $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$, $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}.$$

Cas $\boxed{1}$ Les listes $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et $(a'\ ;\ b'\ ;\ c')$ sont proportionnelles et $(a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d)$ et $(a'\ ;\ b'\ ;\ c'\ ;\ d')$ ne sont pas proportionnelles.

Alors il n'y a pas de triplets solutions de $\mathcal{S}$.

Cas $\boxed{2}$ Les listes $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ et $(a'\ ;\ b'\ ;\ c')$ ne sont pas proportionnelles.

Le système $\mathcal{S}$ caractérise une droite.

Et réciproquement, dans l'espace, toute droite est caractérisée par un système d'équations cartésiennes

$$\mathcal{S} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{où } (a\ ;\ b\ ;\ c) \text{ et } (a'\ ;\ b'\ ;\ c') \text{ non proportionnelles.}$$

Cas $\boxed{3}$ Les listes $(a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d)$ et $(a'\ ;\ b'\ ;\ c'\ ;\ d')$ sont proportionnelles.

Le système $\mathcal{S}$ caractérise un plan.

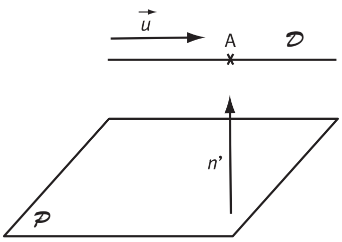
b) Intersection d'une droite et d'un plan

Cas $\boxed{1}$

$\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$

$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \varnothing$

$\vec{u} \perp \vec{n}$

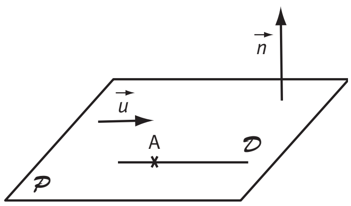


Cas $\boxed{2}$

$\mathcal{D}$ incluse dans $\mathcal{P}$

$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D}$

$\vec{u} \perp \vec{n}$

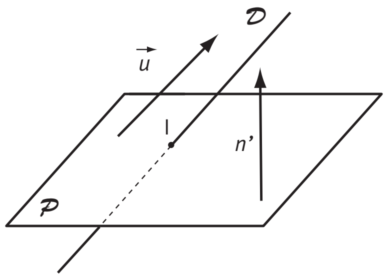


Cas $\boxed{3}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sécants

$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\}$

$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux



B Exercices de synthèse

Exercice I

Soit ABCDEFGH un cube, I le milieu de [CG], J le milieu de [EH] et K défini par : $\overrightarrow{GK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{GH}$. On s'intéresse à la section du cube par le plan (IJK).

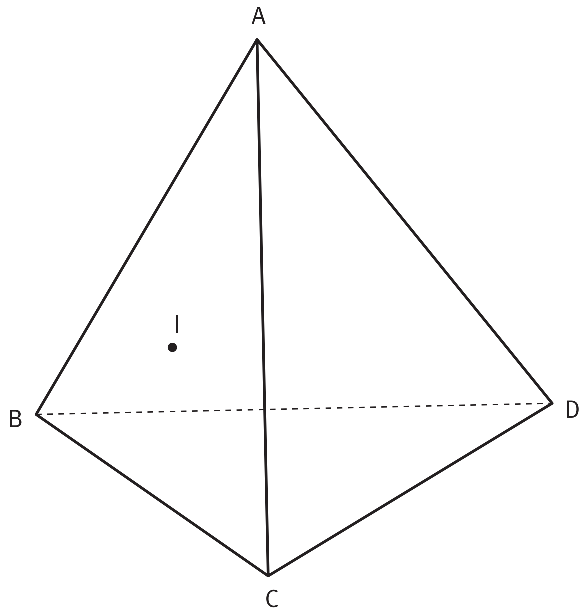
❶ Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

❷ En déduire que les points A, I, J et K sont coplanaires.

❸ Construire la section du cube par le plan (IJK).

Exercice II

Soit ABCD un tétraèdre et I un point de la face (ABC). J est l'intersection de la parallèle à (AD) passant par I et du plan (BCD).



❶ *Aspect géométrique*

Construire J.

❷ *Aspect algébrique*

On se place dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$. On note α l'abscisse de I et β son ordonnée.

a) Quel est sa côte ?

b) Déterminer une représentation paramétrique de Δ. En déduire l'abscisse et l'ordonnée de J.

c) Déterminer une représentation paramétrique du plan (BCD). En déduire la côte de J en fonction de α et β.

Exercice III

Soit ABCD un tétraèdre, I le milieu de [AD], G le centre de gravité du triangle ABC et E le point tel que BECD soit un parallélogramme. On se propose de démontrer de plusieurs façons que I, G et E sont alignés.

I. *Méthode géométrique*

On note J le milieu de [AB] et K le milieu de [AC].

1. En considérant les trois plans (CJI), (ABD) et (BCD) et leurs intersections deux à deux, montrer que (CJI) coupe le plan (BCD) selon la parallèle à (BD) passant par C.
2. Montrer que (BIJ) coupe (BCD) selon la parallèle à (CD) passant par B.
3. En déduire que I, G et E sont alignés.

II. *Méthode vectorielle*

1. Montrer que : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}$.
2. Montrer que : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IE}$.
3. Conclure.

III. *Méthode analytique*

On note L le milieu de [BC].

On suppose A, B, C et D non coplanaires et on se place dans le repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées de A, B, C, D, E, I, L et G.
2. En déduire une représentation paramétrique de (IE) puis conclure.

Exercice IV

Soit ABCDEFGH un cube de centre O, I le milieu de [CG], J le milieu de [EH] et K un point de [HG]. On s'intéresse à la section du cube par le plan (IJK) selon la position de K.

On note a le réel de [0 ; 1] tel que : $\overrightarrow{GK}=a\overrightarrow{GH}$.

Partie I *Construction, conjectures*

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace comme Geoplan – Geospace, faire la figure *(on choisira dans un premier temps* : $a=0{,}2$*)*. Afficher la valeur de a.
2. Pourquoi les droites (IK) et (CD) sont-elles sécantes ? On note M l'intersection de ces deux droites.
3. Montrer que l'intersection des plans (IJK) et (ABCD) est la parallèle à (JK) passant par M.
4. Construire la section du cube par le plan (IJK). On note $\mathcal{P}$ le polygone obtenu.
5. *Conjectures*

   a) Pour quelle(s) valeur(s) de t, $\mathcal{P}$ est-il un hexagone régulier ?

   b) Pour quelle(s) valeur(s) de t, $\mathcal{P}$ a-t-il un sommet en commun avec le cube ?

Partie II *Vérification*

On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

❶ Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

❷ Déterminer une équation cartésienne du plan (AIJ)

❸ En déduire que A, I, J et K sont coplanaires si et seulement si $a=\frac{1}{3}$.

Exercice V

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

❶ Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

❷ Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x+2y+2z-5=0$.

❸ a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

b) En déduire les coordonnées du point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD).

c) Placer le point R sur la figure.

❹ Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK).

Exercice VI

Soit ABCDEFGH un cube de côté a. Soit I le milieu de [BG] et J défini par : $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. On veut montrer que (IJ) est orthogonale aux droites (FC) et (AG).

❶ a) Montrer que $(FC)\perp(AGB)$.

b) En déduire que $(FC)\perp(IJ)$.

❷ a) Montrer que $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{AG}=a^2$.

b) Déterminer $\overrightarrow{GJ}\cdot\overrightarrow{AG}$.

c) En déduire que : $(AG)\perp(IJ)$.

Exercice VII

Soit SABCD une pyramide dont la base est un carré de côté 1 et que [SA] est orthogonale au plan (ABC) telle que SA = 1.

Déterminer le point M de [SC] tel que l'angle $\widehat{BMD}$ soit maximal.

Partie I *Conjecture*

❶ Faire la figure à l'aide du logiciel Geospace. Créer une variable libre a dans [0 ; 1], créer le point M tel que $\overrightarrow{SM}=a\overrightarrow{SC}$. Afficher les valeurs de a et de $\widehat{BMD}$.

❷ En modifiant la valeur de a (on pourra choisir un pas de pilotage de 0,01), conjecturer la valeur maximale de $\widehat{BMD}$ et la valeur de a correspondante.

Partie II *Démonstrations*

On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AS}\right)$.

❶ Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, S et M.

❷ Calculer MB, MD et $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

❸ En déduire : $\cos\left(\widehat{BMD}\right) = 1 - \dfrac{1}{3a^2 - 4a + 2}$.

❹ Étudier les variations sur [0 ; 1] de la fonction $f : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{3x^2 - 4x + 2}$.

❺ Démontrer alors la conjecture énoncée partie I.

Exercice VIII

On considère dans l'espace muni d'une base orthonormée $\left(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$:

A (a ; 0 ; 0), B (0 ; b ; 0) et C (0 ; 0 ; c) (a, b, c sont strictement positifs).

❶ On note H l'orthocentre de ABC et S l'aire du triangle ABC.

❷ Déterminer le volume du tétraèdre.

❸ Montrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (AOH).

❹ En déduire que (OH) $\perp$ (BC) puis que : (OH) $\perp$ (ABC).

❺ Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

❻ Déterminer OH. En déduire une expression de S en fonction de a, b et c.

■