Séquence 6

Ensemble des nombres complexes

Sommaire

Cette séquence est une brève introduction à un nouvel ensemble de nombres, ensemble qui contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et dans lequel les carrés peuvent être négatifs.

1 Prérequis

A Équation du second degré dans $\mathbb{R}$

Les nombres a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$ et x est un nombre réel.

Théorème

Tout trinôme du second degré ax^2+bx+c avec $a \neq 0$ peut s'écrire sous la forme

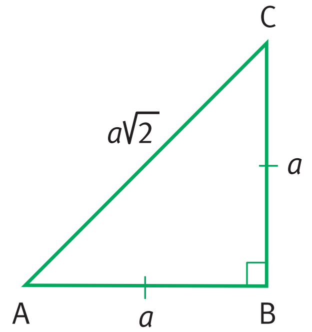
$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) \text{ où } \Delta=b^2-4ac.$$

Théorème

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax^2+bx+c=0$		
$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Deux solutions : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Une solution : $\alpha=\frac{-b}{2a}$	Pas de solution

B Géométrie

❶ Longueur de la diagonale d'un carré, de l'hypoténuse d'un rectangle isocèle.



❷ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

- L'équation $ax+by+c=0$ avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ est une équation de droite.
- La distance des points $M_0(x_0\,;y_0)$ et $M(x\,;y)$ est égale à
$$M_0M=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$
- L'équation $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ est une équation du cercle de centre $\Omega(x_0\,;y_0)$ et de rayon R.

Exemple A Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ ayant pour équation $x^2+y^2-4x+2y=0$ est un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

Solution On transforme l'équation donnée pour faire apparaître $\left(x-x_0\right)^2$ et $\left(y-y_0\right)^2$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x+2y=0 &\Leftrightarrow \left(x^2-4x\right)+\left(y^2+2y\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+2y+1\right)-5=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=5. \end{aligned}$$

La dernière équation permet de reconnaître que l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega(2\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

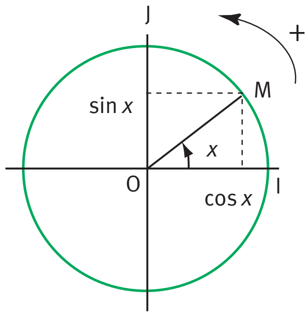
3 Formules de trigonométrie

Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OI}},\overrightarrow{\mathrm{OJ}})$, on considère un cercle $\mathcal{C}$ orienté de centre O et de rayon 1. Soit x un réel et M le point qui lui est associé.

On appelle cosinus de x et sinus de x les coordonnées de M dans le repère $(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{\mathrm{OI}},\overrightarrow{\mathrm{OJ}})$.

On a ainsi : M $(\cos x\,;\sin x)$.



À savoir

Réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété

Pour tout réel x et tout entier relatif k, on a :

- $-1 \le \cos x \le 1$ et $-1 \le \sin x \le 1$;
- $\cos^2 x+\sin^2 x=1$;
- $\begin{cases}\cos(x+k\times 2\pi)=\cos x \\ \sin(x+k\times 2\pi)=\sin x\end{cases}$.

Propriétés

cosinus et sinus des réels associés à un réel x

$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$

$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$

Propriétés

Formules d'addition

Pour tous réels a et b, on a :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$ $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$ $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$ $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

C Fonction exponentielle

Théorème

Relation fonctionnelle caractéristique

La fonction exponentielle est la seule fonction f non nulle et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$ et, pour tous réels a et b, $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.

2 Définition – Forme algébrique

A Objectifs du chapitre

L'existence d'un ensemble de nombres dans lequel des carrés peuvent être négatifs est énoncée dans un théorème, admis en terminale.

On expérimente alors les calculs possibles.

On en donne une première interprétation géométrique.

On résout toutes les équations du second degré.

Par nécessité, la notion de nombre s'est enrichie au cours des siècles.

- On connaît $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\}$.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs contient $\mathbb{N}$ ainsi que les opposés des entiers naturels : $\mathbb{Z} = \{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;\ldots\}$
- Les nombres fractionnaires, nécessaires pour les partages, sont de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers ; ils constituent l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Remarque En prenant $b = 1$, on voit que $\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$.

- L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est constitué de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et aussi de l'ensemble des nombres irrationnels (qu'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers) ; nous en connaissons des exemples : $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}\ldots$
- Pour résoudre des équations (du troisième degré en particulier), les mathématiciens du XVI^e siècle commencèrent à entrevoir l'existence d'autres nombres qu'ils appellent nombres imaginaires. C'est le cas en particulier de Jérôme Cardan, mathématicien italien, qui obtenait des résultats intéressants en prenant la racine carrée d'un nombre négatif.

  Au milieu du XVIII^e siècle, le mathématicien suisse Leonhard Euler désigne par i le nombre imaginaire $\sqrt{-1}$; ainsi $i^2 = -1$ et tous les imaginaires inventés seront de la fonne $a + ib$ avec a et b réels.

  Tous ces nombres constituent l'ensemble des nombres complexes, exemple que l'on va noter $\mathbb{C}$.

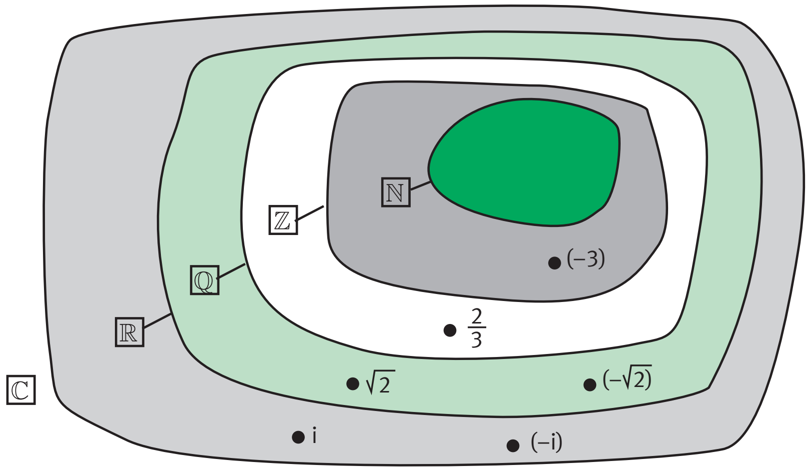
  Ces ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres. Ils ont des propriétés différentes, en particulier dans la résolution des équations.

  L'équation $7 + x = 4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais sa solution (–3) est dans $\mathbb{Z}$.

  L'équation $3x = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais sa solution $\frac{2}{3}$ est dans $\mathbb{Q}$.

L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, ses solutions $(-\sqrt{2})$ et $\sqrt{2}$ sont irrationnelles.

L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, mais aura 2 solutions i et (–i) dans le nouvel ensemble $\mathbb{C}$ que l'on va étudier maintenant.



B Pour débuter

■ Activité 1

La résolution des équations du second degré était connue des Babyloniens vers 1700 ans avant J.-C.

L'étude de la résolution des équations du troisième degré aboutit en 1545 avec la publication, dans *l'Ars Magna* de Jérôme Cardan, de la formule découverte par Scipione dal Ferro.

Une équation de la forme $x^3 = px + q$ a pour solution le nombre x donné par

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 - 4p^3}{108}}}.$$

Dans cette formule, le symbole $\sqrt[3]{}$ désigne la racine cubique d'un nombre : a étant un nombre réel, $\sqrt[3]{a}$ désigne le seul nombre réel dont le cube est égal à a. L'existence et l'unicité du nombre $\sqrt[3]{a}$ sont prouvées à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. Sur une calculatrice, la racine cubique du nombre a s'obtient en élevant a à la puissance $\frac{1}{3}$.

1. Démontrer que toute équation de la forme $x^3 = px + q$ possède au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

2. En utilisant la formule publiée par Cardan, trouver une valeur de x solution de l'équation $x^3 = 2x + 4$.

Mais si on essaie de faire de même avec l'équation $x^3 = 15x + 4$, on ne peut pas conclure car $27q^2 - 4p^3$ est strictement négatif et on ne peut pas en prendre la racine carrée. Mais on sait qu'il y a au moins une solution d'après 1.

Des algébristes italiens du XVIe siècle, Bombelli en particulier, eurent l'audace de continuer quand même les calculs en utilisant un nombre dont le carré est égal à -1. Ce nombre sera plus tard noté i par L. Euler en 1777.

3 En utilisant l'égalité $\mathrm{i}^2=-1$, montrer que, dans le cas de l'équation $x^3=15x+4$, on a

$$\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{27q^2-4p^3}{108}}=2+11\mathrm{i} \text{ et } \frac{q}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{27q^2-4p^3}{108}}=2-11\mathrm{i}.$$

4 En utilisant l'identité remarquable $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, vérifier que $(2+\mathrm{i})^3=2+11\mathrm{i}$ et $(2-\mathrm{i})^3=2-11\mathrm{i}$.

5 En déduire une solution x_0 de l'équation $x^3=15x+4$.

6 Terminer la résolution de l'équation $x^3=15x+4$ en montrant qu'elle est équivalente à une équation de la forme $(x-x_0)(x^2+ax+b)=0$.

C Cours

1. Définition

Théorème 1

(*Admis*) Il existe un ensemble, l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition, d'une multiplication (et donc d'une soustraction et d'une division) qui possèdent les mêmes règles de calcul que dans l'ensemble des nombres réels ;
- il existe, dans $\mathbb{C}$, un nombre i tel que $\mathrm{i}^2=-1$;
- tout nombre complexe z s'écrit de façon *unique* sous la forme $z=a+\mathrm{i}b$, où a et b sont des nombres réels.

Remarque

Dans $\mathbb{R}$, il est impossible de trouver des nombres dont le carré est négatif. Dans $\mathbb{C}$, cela devient possible…

On a prolongé les opérations (addition et multiplication) avec leurs propriétés, mais on a perdu une autre des propriétés de $\mathbb{R}$: l'ordre. Dans $\mathbb{R}$, deux nombres quelconques x et y peuvent toujours être comparés : on a $x\le y$ ou $x>y$. Une des conséquences de l'ordre dans $\mathbb{R}$ est la règle des signes, en particulier on sait qu'un carré, qui est le produit de deux nombres de même signe, est un nombre positif.

L'ordre de $\mathbb{R}$ ne peut donc pas être prolongé dans $\mathbb{C}$ puisque, dans $\mathbb{C}$, il existe des carrés négatifs. Ainsi, le nombre i ne peut pas être comparé à 0, le nombre i n'est pas positif et i n'est pas négatif.

Le symbole $\sqrt{\ }$ désigne, dans $\mathbb{R}$, le nombre positif dont le carré est égal au nombre positif qui est sous le radical. Comme il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$, le mot « positif » n'a pas de sens pour un nombre non réel et on ne peut pas généraliser l'utilisation de ce symbole qui reste donc réservé aux **réels positifs**.

Définitions 1

- L'écriture $a+\mathrm{i}b$, a et b étant réels, s'appelle **la forme algébrique** du nombre complexe z tel que $z=a+\mathrm{i}b$.
- Le nombre réel a s'appelle **partie réelle** du nombre complexe z et on écrit $a=\mathrm{Re}(z)$.
- Le nombre réel b s'appelle **partie imaginaire** du nombre complexe z et on écrit $b=\mathrm{Im}(z)$.
- Quand a est nul, le nombre complexe z s'écrit $z=\mathrm{i}b$ et on dit que z est un imaginaire pur (après leur invention, les nombres complexes étaient appelés « nombres imaginaires »).

Remarque

- La partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe z, $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$, sont des nombres réels.
- Le nombre réel 0 est un imaginaire pur ($0 = 0 \times \mathrm{i}$) !

Propriété 1

- Nombre complexe nul : $a+\mathrm{i}b=0 \Leftrightarrow a=0$ et $b=0$.
- Égalité : $a+\mathrm{i}b=a'+\mathrm{i}b' \Leftrightarrow a=a'$ et $b=b'$ (où a, b, a' et b' sont réels).
- Caractérisation d'un nombre réel : $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0$.
- Caractérisation d'un imaginaire pur : z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$.

■ *Démonstration*

Ces quatre propriétés sont déduites de l'unicité de l'écriture sous forme algébrique $z=a+\mathrm{i}b$, unicité qui est énoncée dans le théorème 1.

2. Opérations

On applique les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$. On a donc les mêmes identités remarquables.

Voici quelques exemples de calcul.

▶ Exemples

- $(2 + 3\mathrm{i}) + (5 - 4\mathrm{i}) = 2 + 5 + 3\mathrm{i} - 4\mathrm{i} = 7 - \mathrm{i}$.
- $(2 + 3\mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 2 + 3\mathrm{i} - 2\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = 2 + \mathrm{i} + 3 = 5 + \mathrm{i}$, car $\mathrm{i}^2 = -1$.
- $(2 + 3\mathrm{i})^2 = 2^2 + 2 \times 2\ \ 3\mathrm{i} + (3\mathrm{i})^2 = 4 + 12\mathrm{i} + 9\mathrm{i}^2 = 4 + 12\mathrm{i} - 9 = -5 + 12\mathrm{i}$.

Ici, on a utilisé une identité remarquable qui se calcule comme dans $\mathbb{R}$; on a aussi utilisé le fait que $\mathrm{i}^2 = -1$.

- $(1 + 3i)(1 - 3i) = 1^2 - (3i)^2 = 1 - 9i^2 = 1 + 9 = 10$.

Ici, c'est l'identité remarquable $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ qui a été utilisée en prenant $x = 1$ et $y = 3i$.

On peut remarquer que le produit de ces deux nombres complexes non réels est un nombre réel.

Propriété 2

Pour tous nombres complexes $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$, a, b, a' et b' étant des nombres réels, on a :

$z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$;

$zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b)$;

$kz = ka + \mathrm{i}kb$ pour tout réel k ;

$\dfrac{1}{a + \mathrm{i}b} = \dfrac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\dfrac{b}{a^2 + b^2}$ si $z \neq 0$.

Démonstration

On applique les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.

Pour le produit, on a

$$\begin{aligned} zz' &= (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') \\ &= aa' + \mathrm{i}ba' + \mathrm{i}ab' + \mathrm{i}^2 bb' \\ &= (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b) \text{ car } \mathrm{i}^2 = -1. \end{aligned}$$

Pour l'inverse, on utilise une identité remarquable (comme on l'a fait avec des radicaux) en multipliant le numérateur et le dénominateur par $a - \mathrm{i}b$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{a - \mathrm{i}b}{(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 - \left(-b^2\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

▶ Conséquence

- Tout nombre complexe non nul admet un inverse.
- Pour tous nombres complexes z et z', on a : $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Démonstration

On a trouvé un inverse pour chaque nombre complexe non nul donc si $zz' = 0$ et $z \neq 0$, en multipliant par l'inverse de z (c'est-à-dire en divisant par z), on obtient $z' = 0$. Donc si $zz' = 0$ alors on a $z = 0$ ou $z' = 0$.

On vérifie facilement la réciproque en utilisant par exemple $a = b = 0$.

▶ Exemple 1 Déterminer la forme algébrique de l'inverse du nombre $2 + 3\mathrm{i}$ et du quotient $\dfrac{3 + \mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$.

▶ Solution On a :

$$\frac{1}{2 + 3\mathrm{i}} = \frac{2 - 3\mathrm{i}}{2^2 + 3^2} = \frac{2}{13} - \mathrm{i}\frac{3}{13} ;$$

$$\frac{3+i}{1-2i}=\frac{(3+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{(3+2i^2)+i(3\times 2+1)}{1^2+2^2}=\frac{1+7i}{5}=\frac{1}{5}+i\frac{7}{5}.$$

Remarque Quelques propriétés du nombre i :

$$i^2=-1 ; i^3= i^2\times i=-i \; ; \; i^4=(i^2)^2=1 ; i^5=i\ldots \; ; \; \frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i.$$

Pour $n\in\mathbb{N}$, $i^{4n}=(i^4)^n=1^n=1$

$i^{4n+1}=i^{4n}\ \ i=1\ \ i=i$

$i^{4n+2}=i^{4n}\ \ i^2=1\ \ (-1)=-1$

$i^{4n+3}=i^{4n}\ \ i^3=1\ \ (-i)=-i$

▶ Exemple 2 Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$(1+i)^3 \; ; \; \frac{1}{7-4i} \; ; \; \frac{2-3i}{1+4i} \; ; \; \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^9 \; ; \; \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{35}.$$

▶ **Solution**

- $(1+i)^3=1^3+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i$
- $\dfrac{1}{7-4i}=\dfrac{7+4i}{(7-4i)(7+4i)}=\dfrac{7+4i}{7^2+4^2}=\dfrac{7}{65}+\dfrac{4}{65}i$
- $\dfrac{2-3i}{1+4i}=\dfrac{(2-3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\dfrac{2-3i-8i-12}{1^2+4^2}=-\dfrac{10}{17}-\dfrac{11}{17}i$
- $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^9=\left(\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^9=\left(\dfrac{1+2i-1}{1^2+1^2}\right)^9=(i)^9=i$

Remarque Penser à simplifier d'abord la parenthèse et ne faire agir qu'ensuite l'exposant.

- $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{35}=\left(\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)=\left(\dfrac{1-2i-1}{1^2+1^2}\right)^{35}=(-i)^{35}=(-1)^{35}(i)^{35}=-i^{35}$

$$=-i^{4\times 8+3}=-(i^4)^8\times i^3=-1^8\times i^3=-i^3=-(-i)=i$$

3. Représentation géométrique

Les nombres complexes ont longtemps été acceptés difficilement.

Peu à peu, des mathématiciens en ont donné une interprétation géométrique : Wessel en 1797 dans un texte en danois qui fut peu diffusé, Argand en 1806, Gauss en 1831. Leur existence n'a ensuite plus posé de difficultés.

Définition 2

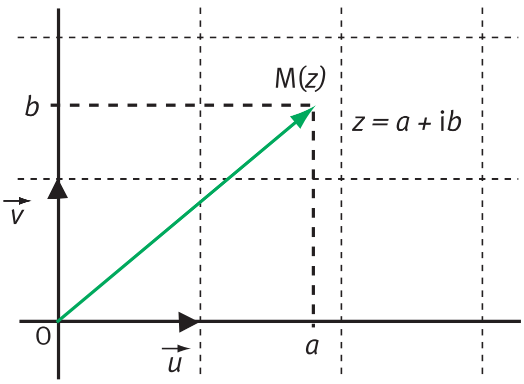
Soit $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

- À tout nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$ (avec a et b réels), on associe le point M de coordonnées $(a\,;b)$ dans ce repère.

On dit que M est le point image de z et que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.

- Inversement, au point $M(a\,;b)$ du plan, on associe le nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$.

On dit que z est l'affixe du point M et aussi du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Notation

Le point M ayant pour affixe z peut être noté M(z).

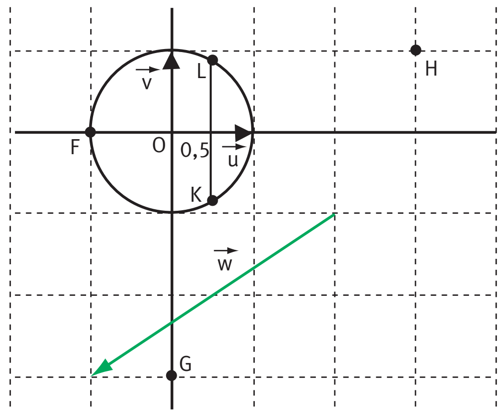
Remarque Pour éviter toute confusion, les vecteurs du repère ne s'appellent pas $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

▶ Exemple 3

❶ Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, placer les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$z_A=-2+3\mathrm{i}\ ;\ z_B=3-\mathrm{i}\ ;\ z_C=-3\mathrm{i}\ ;\ z_D=5\ \text{ et }\ z_E=\sqrt{2}+2\mathrm{i}.$$

❷ Lire les affixes z_F, z_G, z_H, z_K, z_L et $z_{\vec{w}}$.



❸ Représenter dans le plan :

a) l'ensemble $\mathscr{D}_1$ des points M d'affixe z telles que $\text{Re}(z)=-1$;

b) l'ensemble $\mathscr{D}_2$ des points M d'affixe z telles que $\text{Im}(z)=3$.

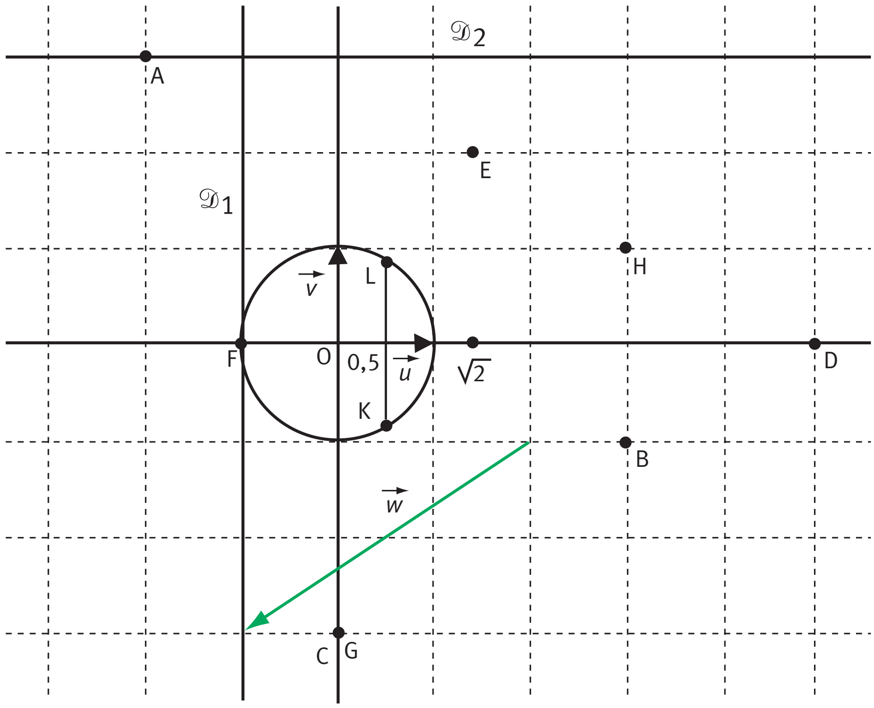
▶ **Solution**

❶ On place les points d'après leurs coordonnées : $A(-2\,;3)$, $B(3\,;-1)$, $C(0\,;-3)$, $D(5\,;0)$ et $E\left(\sqrt{2}\,;2\right)$.

❷ En lisant les coordonnées, on obtient les affixes :

$$z_F=-1,\ z_G=-3\,\text{i},\ z_H=3+\text{i},\ z_K=\frac{1}{2}-\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_L=\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ et }\ z_{\vec{w}}=-3-2\,\text{i}$$

(On a remarqué que les points K et L sont sur le cercle trigonométrique.)



❸ **a)** Le point M d'affixe $z=a+\text{i}b$ (avec a et b réels) est un point de $\mathscr{D}_1$ si et seulement si $a=-1$, l'ensemble $\mathscr{D}_1$ est donc la droite d'équation $x=-1$.

b) De même l'ensemble $\mathscr{D}_2$ des points M d'affixe z telles que $\text{Im}(z)=3$ est la droite d'équation $y=3$.

Remarque

	Nombres complexes	Vecteurs
Somme	**Soit** $z=a+\text{i}b$ **et** $z'=a'+\text{i}b'$, **alors** $z+z'=(a+a')+\text{i}(b+b')$	**Soit** $\vec{v}(a\,;b)$ **et** $\vec{v'}(a'\,;b')$, **alors** $\vec{v}+\vec{v'}(a+a'\,;b+b')$
Produit par un réel k	$k\,z=k(a+\text{i}b)=ka+i(kb)$	$k.\vec{v}(ka\,;kb)$
En particulier $k=-1$	$-z=-a-\text{i}b$	$-\vec{v}(-a\,;-b)$

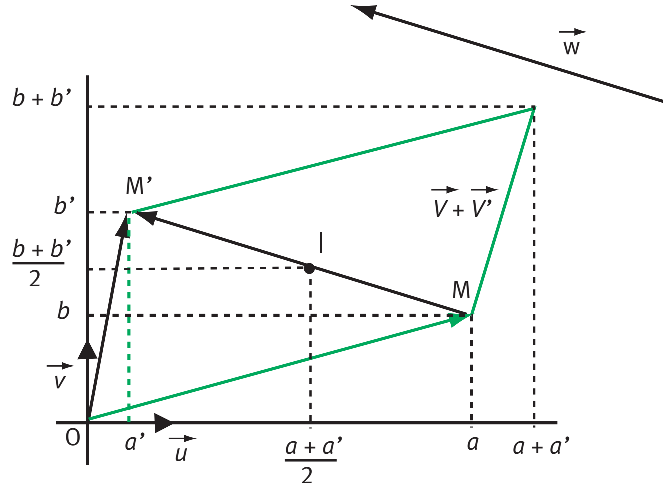
On observe une grande correspondance entre ces opérations pour les nombres complexes et pour les vecteurs.

Pour l'addition et la multiplication par un nombre réel, manipuler les deux coordonnées d'un vecteur revient à manipuler un seul nombre complexe.

On obtient ainsi les propriétés suivantes.

Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point M de coordonnées $(a\,;b)$ et le point M' de coordonnées $(a'\,;b')$ et on pose $\vec{V}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}=a\vec{u}+b\vec{v}$, $\vec{V}'=\overrightarrow{\mathrm{OM}'}=a'\vec{u}+b'\vec{v}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$.

On note $z_{\vec{V}}=z_{\mathrm{M}}=a+b\,\mathrm{i}$ et $z_{\vec{V}'}=z_{\mathrm{M}'}=a'+b'\,\mathrm{i}$.



Propriété 3

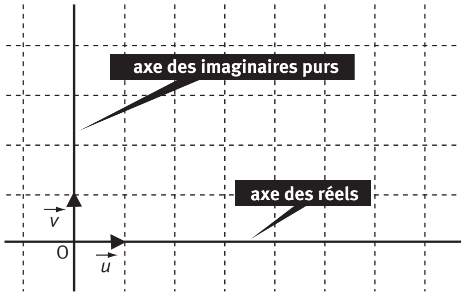
- $\vec{V}+\vec{V}'$ a pour affixe $z_{\vec{V}}+z_{\vec{V}'}$, ou encore $z_M+z_{M'}$.
- $\vec{V}'-\vec{V}$ a pour affixe $z_{\vec{V}'}-z_{\vec{V}}$ ou encore $z_{M'}-Z_M$.
- $z_{\overrightarrow{\mathrm{MM}'}}=z_{\mathrm{M}'}-z_{\mathrm{M}}$ (affixe de l'extrémité diminuée de l'affixe de l'origine). car $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}=\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}'}=\overrightarrow{\mathrm{OM}'}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{V}'-\vec{V}$.
- Pour k réel quelconque $k\bullet\vec{V}$ a pour affixe $k\times z_{\vec{V}}$.
- L'affixe du milieu I d'un segment est la demi-somme des affixes des extrémités.
- (–z) est l'affixe du symétrique de M(z) dans la symétrie centrale de centre O.

Les coordonnées du point image de z étant formées par la partie réelle et la partie imaginaire de z, on obtient les caractérisations suivantes.

Propriété 4

- Caractérisation d'un nombre réel : $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{M}(z)\in(\mathrm{O}x)$.
- Caractérisation d'un imaginaire pur : z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{M}(z)\in(\mathrm{O}y)$

Vocabulaire L'axe des abscisses est aussi appelé l'axe des réels et l'axe des ordonnées, l'axe des imaginaires purs.



4. Nombre conjugué d'un nombre complexe

Définition 3

Le conjugué d'un nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$ (a et b réels) est le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par :

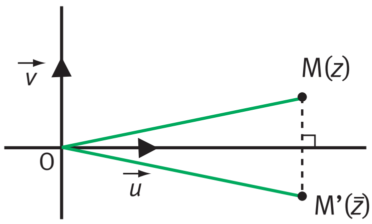
$\bar{z}=a-\mathrm{i}b.$ ($\bar{z}$ se lit « z barre »).

Remarque On a déjà utilisé ce nombre dans les calculs faits pour trouver la forme algébrique d'un inverse ou d'un quotient.

▶ Exemple

- Si $z=2+3\mathrm{i}$, on a $\bar{z}=2-3\mathrm{i}$;
- si $z=4-5\mathrm{i}$, on a $\bar{z}=4+5\mathrm{i}$;
- si $z=\mathrm{i}$, on a $\bar{z}=-\mathrm{i}$;
- si $z=7$, on a $\bar{z}=7$.

Remarque On observe que z et $\bar{z}$ ont la même partie réelle et que leurs parties imaginaires sont opposées.



Géométriquement, les points images d'un nombre complexe et de son conjugué sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriété 5

Pour tous nombres complexes z et z' :

a) $\overline{\overline{z}} = z$;

b) pour tout réel λ, $\overline{\lambda} = \lambda$ et, pour tout imaginaire pur $\mathrm{i}b$, $\overline{\mathrm{i}b} = -\mathrm{i}b$;

c) $z\overline{z} = a^2 + b^2$, et donc $z\overline{z}$ est réel ;

d) $z + \overline{z} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}\ \mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\,\mathrm{i}}$;

e) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

f) $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; cas particuliers : pour tout λ réel, $\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$ et donc $\overline{-z} = -\overline{z}$;

g) pour tout $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$;

h) pour tout entier n dans $\mathbb{Z}$, $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Démonstration

Les égalités de **a)** à **f)** incluses se démontrent directement à partir de la définition 3. En particulier la relation **c)** :

$$z\overline{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 - (\mathrm{i})^2 b^2 = a^2 + b^2.$$

g) On peut utiliser le conjugué d'un produit car $z \times \dfrac{1}{z} = 1$. Ainsi $\overline{\left(z \times \dfrac{1}{z}\right)} = \overline{1} = 1$, d'où $\overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = 1$ et donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$. En écrivant que le quotient $\dfrac{z'}{z}$ est égal au produit $z' \times \dfrac{1}{z}$, on obtient $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \overline{\left(z' \times \dfrac{1}{z}\right)} = \overline{z'} \times \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

h) Montrons d'abord par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n = 1$, l'égalité est vraie puisqu'il s'agit du même nombre : $\overline{z}$.

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un entier k strictement positif, $\overline{\left(z^k\right)} = \left(\overline{z}\right)^k$. Pour l'entier suivant, on a

$$\overline{\left(z^{k+1}\right)} = \overline{\left(z^k \times z\right)} = \overline{\left(z^k\right)} \times \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^k \times \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^{k+1}$$

en appliquant d'abord la propriété **f)** sur le conjugué du produit de deux nombres complexes, puis en utilisant l'hypothèse de récurrence. L'égalité est donc vraie au rang $n = k+1$. La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\bar{z}\right)^n$.

On utilise les exposants négatifs comme dans $\mathbb{R}$ et, en utilisant la propriété sur les inverses des nombres complexes non nuls, on obtient $\overline{\left(z^{-n}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)}=\frac{1}{\overline{\left(z^n\right)}}=\frac{1}{\left(\bar{z}\right)^n}=\left(\bar{z}\right)^{-n}$ pour tout entier naturel n non nul.

On pose enfin $z^0=1$ et on peut conclure : pour tout entier n dans $\mathbb{Z}$, $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\bar{z}\right)^n$.

Remarque On peut préférer retenir certaines de ces propriétés par des phrases :

a) le conjugué du conjugué d'un nombre complexe z est égal à z ;

e) le conjugué d'une somme est égal à la somme des conjugués ;

f) le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués ;

g) le conjugué d'un inverse est égal à l'inverse de son conjugué ; le conjugué du quotient de deux nombres complexes est égal au quotient des conjugués.

Les égalités **d)** de la propriété 5 donnent une nouvelle caractérisation des réels et des imaginaires purs.

Propriété 6

- Caractérisation d'un nombre réel : $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \bar{z}=z$.
- Caractérisation d'un imaginaire pur : z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z}=-z$.

▶ Exemple 4 Sans chercher la forme algébrique, donner directement les conjugués de z et de z' avec $z=(4-5\,\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$ et $z'=\frac{4-5\,\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$.

▶ **Solution**

- $\bar{z}=\overline{(4-5\,\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}=\overline{(4-5\,\mathrm{i})}\,\overline{(3+\mathrm{i})}=(4+5\,\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$ (on a utilisé la propriété **f)**).
- $\overline{z'}=\overline{\left(\frac{4-5\,\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right)}=\frac{\overline{4-5\,\mathrm{i}}}{\overline{3+\mathrm{i}}}=\frac{4+5\,\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$ (on a utilisé la propriété **g)**).

▶ Exemple 5 Déterminer les nombres complexes z tels que $z\bar{z}+3\left(z-\bar{z}\right)=13+18\,\mathrm{i}$.

▶ **Solution** On pose $z=a+\mathrm{i}b$ (a et b réels). Nous avons vu que $z\bar{z}=a^2+b^2$ et $z-\bar{z}=2\,\mathrm{i}b$.

L'équation de départ est donc équivalente à :

$$a^2+b^2+3\times 2\,\mathrm{i}b=13+18\,\mathrm{i}.$$

Or deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont respectivement égales d'où :

$$\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ 6b=18 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ b=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a^2=4 \\ b=3 \end{cases}$$

d'où deux solutions : $z=2+3\mathrm{i}$ ou $z=-2+3\mathrm{i}$.

3. Équation du second degré dans $\mathbb{C}$, à coefficients réels

▸ Exemple

On a : $-5 = \mathrm{i}^2 5 = \left(\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^2 = \left(-\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^2$;

$-9 = \mathrm{i}^2 9 = (3\,\mathrm{i})^2 = (-3\,\mathrm{i})^2$.

Ces exemples montrent comment, dans $\mathbb{C}$, l'égalité fondamentale $\mathrm{i}^2 = -1$ qui dit que -1 est un carré dans $\mathbb{C}$ entraîne que tout nombre réel négatif est aussi le carré d'un (et même deux) nombre complexe.

Propriété 7

Dans $\mathbb{C}$, tout nombre réel λ strictement négatif est le carré de deux nombres imaginaires purs et conjugués : $\mathrm{i}\sqrt{-\lambda}$ et de $-\mathrm{i}\sqrt{-\lambda}$.

Démonstration

Si $\lambda < 0$ alors $-\lambda > 0$ et $\lambda = -(-\lambda) = \mathrm{i}^2(-\lambda) = \left(\mathrm{i}\sqrt{-\lambda}\right)^2 = \left(-\mathrm{i}\sqrt{-\lambda}\right)^2$.

Dans ce qui suit, les nombres a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$, z désigne un nombre complexe.

Par des calculs analogues à ceux faits dans le cours de Première, on obtient que tout trinôme du second degré $az^2 + bz + c$, avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme $az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ où $\Delta = b^2 - 4ac$.

Pour résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$, on écrit que la grande parenthèse contient la différence de deux carrés. Dans le cas où le nombre réel Δ est strictement négatif, on peut l'écrire maintenant sous la forme d'un carré $\Delta = \left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2$.

On peut donc compléter les résultats déjà connus par :

- Si $\Delta < 0$, alors $\Delta = \left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2$ et on a :

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left[\left(z - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\left(\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z - \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(\left(z - \frac{b}{2a}\right) - \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(\left(z - \frac{b}{2a}\right) + \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \\
&= a\left[z - \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right]\left[z - \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right]
\end{aligned}$$

Alors : $az^2+bz+c=a\left(z-\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$.

On en déduit :

$$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow \left(z-\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0 \text{ ou } \left(z-\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } z=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Propriété 8

Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, les coefficients étant réels.

Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $az^2+bz+c=0$, les nombres a, b et c étant des nombres réels avec $a\neq 0$.

On pose $\Delta=b^2-4ac$ et on appelle S l'ensemble des solutions de (E).

- Si $\Delta>0$, $S=\left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\,;\,\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta=0$, $S=\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta<0$, $S=\left\{\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\,;\,\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$.

Remarque

- Dans le cas où $\Delta<0$, les deux solutions sont des nombres complexes conjugués.
- Dans le cas où $\Delta<0$, en appelant les solutions z_1 et z_2, on obtient $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$. On a vu dans le cours de Première que si $\Delta>0$ ou si $\Delta=0$ on peut factoriser un polynôme du second degré. On en déduit ici que, dans $\mathbb{C}$, un polynôme du second degré se factorise toujours.

▶ Exemple 6 Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2+z+1=0$.

▶ **Solution** On a : $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3=\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$ et donc $S=\left\{\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\,\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Complément On a obtenu que tout polynôme du second degré à coefficients réels admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. On dit aussi que « tout polynôme du second degré à coefficients réels admet deux racines dans $\mathbb{C}$, distinctes ou confondues » (en comptant deux racines confondues dans le cas $\Delta=0$).

Plus généralement, on démontre beaucoup plus loin dans la théorie des nombres complexes le théorème de D'Alembert-Gauss : « Tout polynôme de degré n à coefficients complexes admet n racines dans $\mathbb{C}$ distinctes ou confondues. »

D Exercices d'apprentissage

Exercice 1 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a) $z = (1 + i)(1 - 2i)$

b) $z = (2 - 3i)(3i)$

c) $z = (2i + 1)(1 + i)^2(3i - 4)$

d) $z = (5 + 4i)(3 + 7i)(2 - 3i)$

e) $z = \dfrac{1-i}{2i}$

f) $z = \dfrac{3-4i}{7+5i}$

g) $z = \dfrac{(3-2i)(5+i)}{5-i}$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $(3-i)\overline{z} = \dfrac{1+i}{1-i}$

b) $4z^2 + 8z\overline{z} - 3 = 0$; montrer que les images des quatre nombres solutions forment un losange.

c) $\overline{z} = \dfrac{4}{z}$; quel est l'ensemble des points images des solutions ?

d) $z^2 - 2i\overline{z} = 0$; pour cette question, soit O, A, B, C les images dans le plan complexe, muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, des solutions obtenues. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On pose $Z = (z-2)(\overline{z}+i)$. Soit les écritures algébriques

$z = x + iy$; x, y réels

$Z = X + iY$; X, Y réels

a) Exprimer X et Y en fonction de x et y.

Trouver alors les ensembles suivants :

E_1 : ensemble des points $M(z)$ tels que Z est réel.

E_2 : ensemble des points $M(z)$ tels que Z est imaginaire pur.

b) Traduire à l'aide de $\overline{Z}$ que Z est réel, puis que Z est imaginaire pur.

Retrouver alors les ensembles E_1 et E_2.

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 5 = 0$.
2. Dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on appelle A et B les images des solutions de (E), l'ordonnée de A étant positive. Déterminer l'affixe c du point C tel que le quadrilatère OCAB soit un parallélogramme.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 7z^2 + 12 = 0$.

3 Forme trigonométrique

A Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, on aborde un autre point de vue sur les nombres complexes.

L'interprétation géométrique fait maintenant intervenir les longueurs et les angles.

On montre alors une propriété fondamentale de la multiplication de deux nombres complexes dont on étudie quelques conséquences.

B Pour débuter

■ Activité 2

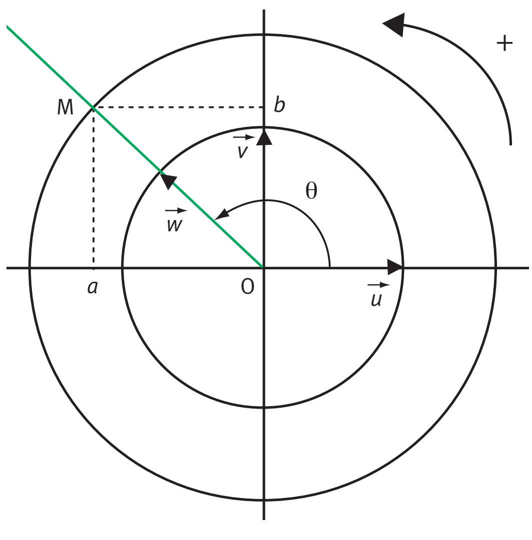
Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

Un point M du plan est alors caractérisé par le couple de ses coordonnées $\left(a\,;b\right)$ telles que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

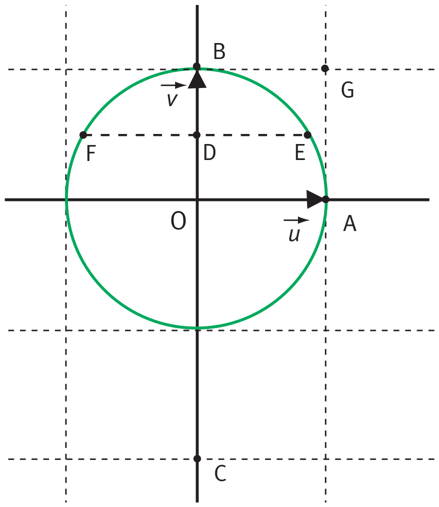
On dit que $\left(a\,;b\right)$ est le couple des coordonnées cartésiennes de M.

Le fait que le repère est orthonormé direct permet de mesurer les angles orientés car le repère indique le sens positif utilisé pour mesurer les angles. Si le point M est différent de l'origine O, on peut alors repérer le point M par la longueur OM et une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

En effet, un point donné M définit un seul couple $\left(\mathrm{OM},\,\theta\right)$, étant défini à 2 près.



Et, inversement, la donnée d'un couple $\left(r,\theta\right)$ où r est un nombre réel strictement positif détermine un seul point M : M se trouve sur le cercle de centre O et de rayon r et sur la demi-droite d'origine O dirigée par un vecteur $\vec{w}$ non nul tel que $(\vec{u}, \vec{w})$ mesure θ. Le point M est déterminé de façon unique car la demi-droite et le cercle n'ont qu'un seul point commun. Le couple (r, θ) est le couple de coordonnées polaires de M, θ étant défini à 2 près.



1. Donner les coordonnées polaires des points A, B, C, D, E, F et G (le point D est le milieu du segment $[OB]$).
2. Placer les points suivants, donnés par leurs coordonnées polaires, et donner la forme algébrique de leurs affixes :

$$H(3, \pi),\ K\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right),\ L\left(2, \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Donner les coordonnées polaires des points suivants, donnés par leurs affixes :

$$z_M = 1 - i,\ z_N = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_P = -2.$$

C Cours

1. Module d'un nombre complexe

a) Définition

Définition 4

On appelle **module** d'un nombre complexe $z = a + ib$ (a et b réels) le nombre réel positif, noté $|z|$, défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

▶ Exemple

$$|2-3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$$

$$|1| = |1+0i| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$$

$$|-3| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = 3$$

$$|i| = 1$$

Propriété 9

Le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

■ *Démonstration*

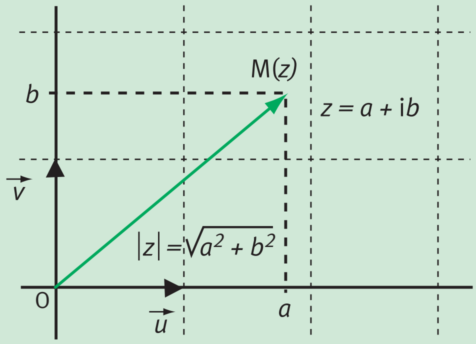
Si $z=a$ (a réel), la définition du module donne $\sqrt{a^2}$ qui est aussi la valeur absolue de a.

Cela justifie l'emploi de la même notation.

Propriété 10

Interprétation géométrique du module

Soit un nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$ (a et b réels) et M son image dans un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, alors $|z|=\mathrm{OM}$.



■ *Démonstration*

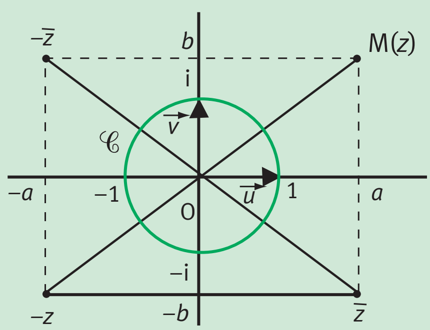
On sait que $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ et que $\mathrm{OM}=\sqrt{a^2+b^2}$.

Conséquence

On a : $|z|=0 \Leftrightarrow \mathrm{M}=\mathrm{O} \Leftrightarrow z=0$.

Propriété 11

Pour tout nombre complexe z : $|z|=|\bar{z}|=|-z|=|-\bar{z}|$.



■ *Démonstration*

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels), on a

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2} = \sqrt{(-a)^2+b^2}.$$

b) Module et produit

Propriété 12

Pour tout nombre complexe z, on a $z\bar{z} = |z|^2$.

■ *Démonstration*

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels), on a montré dans la propriété 5 du *chapitre 2* que

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \text{ donc } z\bar{z} = |z|^2.$$

Cette égalité fait un lien entre z, son conjugué et son module, elle doit être bien connue. Elle va servir immédiatement à démontrer les égalités qui suivent.

Propriété 13

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

a) $|zz'| = |z| \times |z'|$; $|z^n| = |z|^n$ pour tout entier naturel n ;

b) pour $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$;

c) pour $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$;

d) $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

■ *Démonstration*

a) Comme les modules sont des nombres réels positifs, il suffit de prouver l'égalité des carrés de ces quantités. En utilisant la propriété précédente, on obtient :

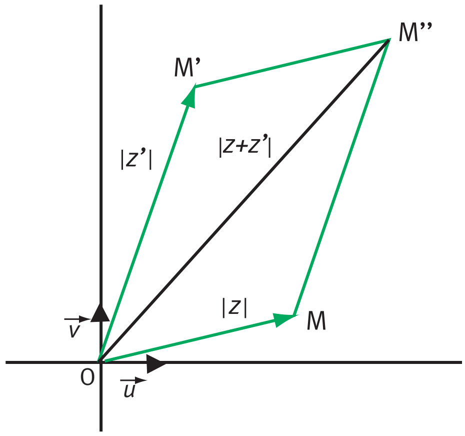
$$|zz'|^2 = (zz')\left(\overline{zz'}\right) = zz'\bar{z}\bar{z'} = (z\bar{z})\left(z'\bar{z'}\right) = |z|^2 \times |z'|^2.$$

La propriété sur les puissances se démontre par récurrence.

b) De même : $\left|\dfrac{1}{z}\right|^2 = \dfrac{1}{z}\left(\overline{\dfrac{1}{z}}\right) = \dfrac{1}{z}\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) = \dfrac{1}{|z|^2}$.

c) En utilisant **a)** et **b)**, on a : $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \left|z' \times \dfrac{1}{z}\right| = |z'| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

d) L'inégalité $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ est parfois appelée « inégalité triangulaire » car on peut l'interpréter géométriquement. Dans un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, soit M l'image de z, M′ l'image de z' et M″ l'image de $z+z'$.



On sait que, dans le triangle OMM″, on a $OM'' \leq OM + MM''$ soit $OM'' \leq OM + OM'$, c'est-à-dire $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.

Remarque On peut préférer retenir les cas **a)**, **b)** et **c)** par des phrases :

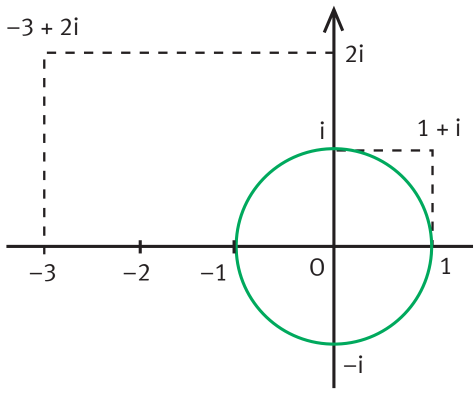
- le module d'un produit est égal au produit des modules ;
- le module de l'inverse d'un nombre complexe non nul est égal à l'inverse de son module ;
- le module d'un quotient est égal au quotient des modules.

Conséquence

La propriété 13 montre que les calculs de modules sont aisés lorsque apparaissent des produits ou des quotients. Par contre, les modules de sommes ne sont pas faciles à manipuler.

▶ Exemple 7 Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$1\,;\,i\,;\,-1\,;\,-i\,;\,-3\,;\,2i\,;\,1+i\,;\,-3+2i\,;$$
$$(1+i)(-3+2i)\,;\,\frac{1+i}{-3+2i}.$$



▶ **Solution**

- $1 = 1 + 0i$ donc $|1| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$
- $i = 0 + 1i$ donc $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$
- $|-1| = |1| = 1$
- $|-i| = |i| = 1$
- $|-3| = 3$
- $|2i| = |2|\ |i| = 2\ \ 1 = 2.$
- $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $|3-2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
- $|(1+i)(-3+2i)| = |1+i| \times |-3+2i| = \sqrt{2} \times \sqrt{13} = \sqrt{26}$
- $\left|\dfrac{1+i}{-3+2i}\right| = \dfrac{|1+i|}{|-3+2i|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\dfrac{2}{13}}$

c) Module et géométrie

Propriété 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit M le point d'affixe z et M_0 le point d'affixe z_0.

On a alors $\left|z - z_0\right| = M_0M$.

■ *Démonstration*

En appelant $\left(x\,;y\right)$ les coordonnées de M et $\left(x_0\,;y_0\right)$ celles de M_0, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|z-z_0\right| &= \left|\left(x+iy\right)-\left(x_0+iy_0\right)\right|\\ &= \left|\left(x-x_0\right)+i\left(y-y_0\right)\right|\\ &= \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}\end{aligned}$$

Et on reconnaît l'expression de la longueur M_0M.

▶ Exemple 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble $\left(E_1\right)$ des points M d'affixe z tels que $\left|z+3+2i\right| = 2$.

b) Déterminer l'ensemble $\left(E_2\right)$ des points M d'affixe z tels que $\left|z-i\right| = \left|z-1\right|$.

▶ **Solution**

a) Soit A le point d'affixe $(-3-2i)$ donc de coordonnées $\left(-3\,;-2\right)$.

$$\begin{aligned}M \in \left(E_1\right) &\Leftrightarrow \left|z-(-3-2i)\right| = 2\\ &\Leftrightarrow AM = 2\\ &\Leftrightarrow \text{M est sur le cercle de centre A et de rayon 2.}\end{aligned}$$

L'ensemble $\left(E_1\right)$ est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

Autre méthode

Cette question peut aussi être étudiée par une méthode analytique, c'est-à-dire avec les coordonnées.

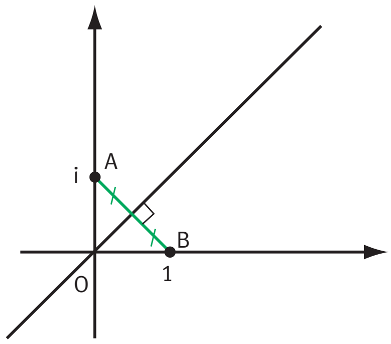
On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).

$$\begin{aligned} M \in (E_1) &\Leftrightarrow |x + \mathrm{i}y + 3 + 2\mathrm{i}| = 2 \\ &\Leftrightarrow |(x+3) + \mathrm{i}(y+2)| = 2 \\ &\Leftrightarrow |(x+3) + \mathrm{i}(y+2)|^2 = 2^2 \\ &\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+2)^2 = 4. \end{aligned}$$

La dernière équation permet de reconnaître que l'ensemble (E_1) est le cercle de centre A et de rayon 2.

b) Soit A(i) et B(1).

$$\begin{aligned} M \in (E_2) &\Leftrightarrow |z - \mathrm{i}| = |z - 1| \\ &\Leftrightarrow AM = BM \\ &\Leftrightarrow \text{M est sur la médiatrice du segment [AB]} \end{aligned}$$



L'ensemble (E_2) est donc la médiatrice de [AB].

Autre méthode

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).

$$\begin{aligned} M \in (E_2) &\Leftrightarrow |x + \mathrm{i}y - \mathrm{i}| = |x + \mathrm{i}y - 1| \\ &\Leftrightarrow |x + \mathrm{i}(y-1)| = |(x-1) + \mathrm{i}y| \\ &\Leftrightarrow |x + \mathrm{i}(y-1)|^2 = |(x-1) + \mathrm{i}y|^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow y = x. \end{aligned}$$

L'ensemble (E_2) est donc la droite d'équation $y = x$, on retrouve ainsi la médiatrice de [AB].

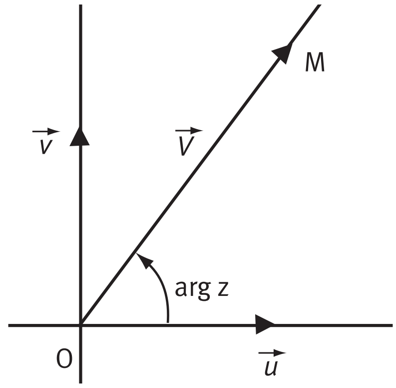
2. Argument d'un nombre complexe non nul

Dans tout ce qui suit, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$. On peut donc mesurer les angles orientés de vecteurs.

Définition 5

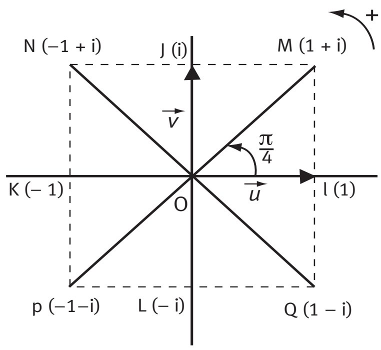
Soit z un nombre complexe non nul et M son image. On appelle argument de z, et on note $\arg z$, n'importe quelle mesure, exprimée en radians, de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$: $\arg z=\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)+2k\pi$.

Si $\vec{V}$ est le vecteur image de z, on a aussi $\arg z=\left(\vec{u},\vec{V}\right)+2k\pi$.



Remarque Le nombre 0 n'a pas d'argument.

▶ Exemples



$\arg 1=(\vec{u},\vec{u})=0$; $\arg(-1)=(\vec{u},\overrightarrow{OK})=\pi$

$\arg i=(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\pi}{2}$; $\arg(-i)=(\vec{u},\overrightarrow{OL})=\dfrac{3\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$

$\arg(1+i)=(\vec{u},\overrightarrow{OM})=\dfrac{\pi}{4}$; $\arg(1-i)=(\vec{u},\overrightarrow{OQ})=\dfrac{7\pi}{4}$ ou $-\dfrac{\pi}{4}$

$\arg(-1+i)=(\vec{u},\overrightarrow{ON})=\dfrac{3\pi}{4}$ $\arg(-1-i)=(\vec{u},\overrightarrow{OP})=\dfrac{5\pi}{4}$ ou $-\dfrac{3\pi}{4}$

Plusieurs arguments pour un nombre complexe non nul

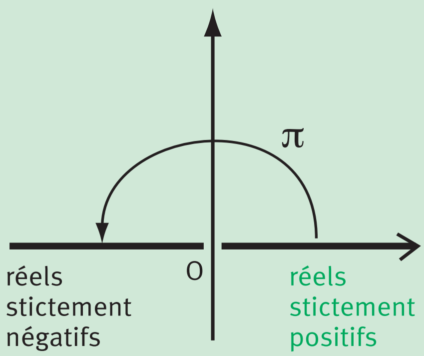
- On vient de le remarquer sur les quelques exemples précédents, un même nombre complexe admet plusieurs arguments $\arg(1-\mathrm{i})=\frac{7\pi}{4}$ ou $\arg(1-\mathrm{i})=-\frac{\pi}{4}$; plus généralement $\arg(1-\mathrm{i})=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$ où k est dans $\mathbb{Z}$; puisque k est quelconque dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, le nombre complexe 1 – i admet une infinité d'arguments.
  On peut écrire $\arg(1-\mathrm{i})=\frac{7\pi}{4}(\text{modulo } 2\pi)$ ou $\arg(1-\mathrm{i})=-\frac{\pi}{4}(\text{modulo } 2\pi)$ mais plus souvent on choisit l'un des arguments et on n'écrit plus « modulo 2 ».
- Plus généralement, tout nombre complexe z *non nul* a une infinité d'arguments ; si est l'un d'entre eux, tout autre argument de z s'écrit + 2k où k est dans $\mathbb{Z}$; on note arg z = 0 (modulo 2) ou arg z = 0[2] ou arg z = 0 (2) ou encore plus simplement arg z = 0.

Ces trois notations signifient qu'un argument de z est , mesure « au tour près » sur le cercle trigonométrique.

Propriété 15

- Caractérisation d'un nombre réel :
$$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \arg z=0+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
- Caractérisation d'un imaginaire pur :
  z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z=0$ ou $\arg z=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

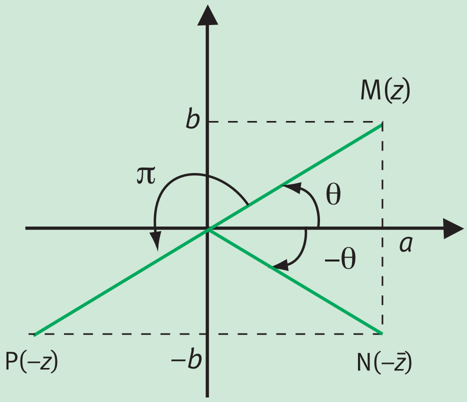
On rappelle que 0 n'a pas d'argument et que 0 est considéré comme un imaginaire pur car $0=0\times\mathrm{i}$.



Propriété 16

Argument du conjugué et de l'opposé d'un nombre complexe non nul

- $\arg(\bar{z}) = -\arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arg(-z) = \arg z + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



La figure permet de mémoriser facilement ces résultats.

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

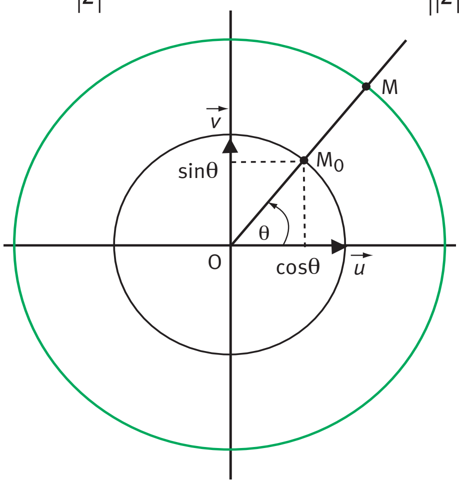
Propriété 17

Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ, on a alors :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

■ *Démonstration*

Le nombre complexe $z_0 = \frac{z}{|z|}$ est de module 1 car $|z_0| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$



Soit M l'image de z et M_0 l'image de z_0. On a $OM_0 = |z_0| = 1$ donc le point M_0 est situé sur le cercle trigonométrique. Comme $|z|$ est positif, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, le vecteur image de z, et $\overrightarrow{OM_0}$, le vecteur image de $z_0 = \dfrac{z}{|z|}$, sont colinéaires et de même sens et on a $\theta = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_0}\right)$. On en déduit que le point M_0 a pour coordonnée $(\cos\theta\,;\sin\theta)$ et pour affixe $z_0 = \cos\theta + i\sin\theta$.

Et ainsi : $z = |z|z_0 = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Définition 6

Lorsqu'un nombre complexe non nul z est écrit sous la forme $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, on dit que le nombre z est écrit sous **forme trigonométrique**.

▶ Exemple

On a : $i = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Propriété 18

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, r étant un nombre réel strictement positif et α un nombre réel quelconque. On a alors : $|z| = r$ et $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$.

■ *Démonstration*

Si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, alors $|z| = |r(\cos\alpha + i\sin\alpha)| = |r||\cos\alpha + i\sin\alpha| = r \times 1 = r$ car r est positif et $\cos\alpha + i\sin\alpha$ est de module 1.

On a alors $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. En nommant θ un argument de z, on obtient $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ donc $\cos\alpha + i\sin\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$. On obtient donc $\begin{cases}\cos\alpha = \cos\theta \\ \sin\alpha = \sin\theta\end{cases}$ ce qui prouve que $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$.

Commentaire

On peut ainsi reconnaître directement la forme trigonométrique de certains nombres complexes.

- $5\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$ est la forme trigonométrique du nombre complexe de module 5 et d'argument $\dfrac{\pi}{7}$.
- $z = -3\left(\cos\dfrac{\pi}{11} + i\sin\dfrac{\pi}{11}\right)$: ce nombre z n'est pas écrit sous forme trigonométrique car -3 est négatif. On transforme l'écriture :

$$-3\left(\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}\right)=3\left(-\cos\frac{\pi}{11}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}\right)$$
$$=3\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{11}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{11}\right)\right).$$

Le nombre z a donc pour module 3 et pour argument $\left(\pi+\frac{\pi}{11}\right)$.

L'écriture d'un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique est donc unique (à 2π près pour l'argument), on en déduit la propriété suivante.

Propriété 19

Égalité de deux nombres écrits sous forme trigonométrique

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument (à 2π près).

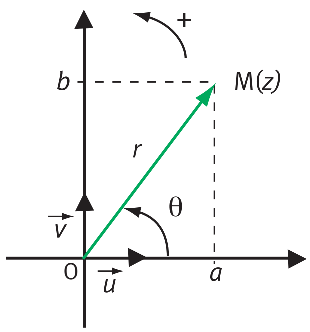
Remarque Écrire un nombre complexe non nul sous forme trigonométrique correspond géométriquement à repérer un point par des coordonnées polaires *(activité 2)*, le plan étant muni d'un repère orthonormé direct.

Conséquence De l'unicité de l'écriture algébrique et des définitions du module, d'un argument et de la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul, on obtient deux systèmes qui indiquent comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.

Propriété 20

Les nombres a, b, r et θ étant des nombres réels, r étant strictement positif, on a :

$$a+\mathrm{i}b=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\Leftrightarrow\begin{cases}r=\sqrt{a^2+b^2}\\ \cos\theta=\dfrac{a}{r}\text{ et }\sin\theta=\dfrac{b}{r}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=r\cos\theta\\ b=r\sin\theta\end{cases}.$$



$a=r\cos\theta$
$b=r\sin\theta$

Dans la pratique, on procède comme dans l'exemple suivant.

▶ Exemple 9 Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z=2-2\mathrm{i}$.

▶ **Solution** Pour mettre ce nombre complexe non nul sous sa forme trigonométrique, on commence par calculer le module de z et mettre ce module en facteur :

on a : $|z|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

d'où $z=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{2}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=2\sqrt{2}\left(\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{i}\right)$

On cherche maintenant θ tel que $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait que : $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où $\arg z=-\frac{\pi}{4}\,(\text{modulo } 2\pi)$ ou plus simplement $\arg z=-\frac{\pi}{4}$.

Conclusion : la forme trigonométrique de $z=2-2\mathrm{i}$ est

$$z=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

4. Produit et quotient de nombres complexes donnés sous forme trigonométrique

- Produit

▶ Considérons deux nombres complexes non nuls z_1 et z_2 sous leur forme trigonométrique $z_1=|z_1|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=|z_2|(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$; étudions le produit z_1z_2.

$$z_1z_2=|z_1||z_2|(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$$

$$z_1z_2=|z_1||z_2|(\cos\theta_1\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_1\cos\theta_2+\mathrm{i}\cos\theta_1\sin\theta_2+\mathrm{i}^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$z_1z_2=|z_1||z_2|((\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2))$$

car $\mathrm{i}^2=-1$.

D'après les formules de trigonométrie on sait que :

$$\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2=\cos(\theta_1+\theta_2)$$

et $\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2=\sin(\theta_1+\theta_2)$

d'où $z_1z_2=|z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2))$.

Le nombre $|z_1||z_2|$ est un réel strictement positif puisque produit de deux réels strictement positifs.

On reconnaît donc l'écriture trigonométrique du produit z_1z_2 ; on en déduit :

$$\begin{cases}|z_1z_2|=|z_1||z_2| & \text{(on savait déjà que le module d'un produit est le produit des modules)}\\ \arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2 & \text{(argument d'un produit = somme des arguments)}\end{cases}$$

- Étudions la forme trigonométrique de l'inverse $\frac{1}{z}$ (z non nul).

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{|z|}\times\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)}$$
$$=\frac{1}{|z|}\times(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\frac{1}{|z|}\times\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right).$$

On reconnaît l'écriture trigonométrique de l'inverse $\frac{1}{z}$; on en déduit :
$\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)$, un argument de l'inverse de z est égal à l'opposé d'un argument de z.

- On peut alors obtenir le résultat pour le quotient $\frac{z_1}{z_2}$ de deux nombres complexes non nuls :

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$, un argument d'un quotient est égal à la différence d'un argument du numérateur et d'un argument du dénominateur.

On peut alors énoncer l'ensemble de ces résultats, la propriété sur les puissances se démontrant par récurrence en utilisant la propriété du produit.

Propriété 21

La forme trigonométrique : les produits, puissances et quotients

Soit trois nombres complexes non nuls z, z_1 et z_2, et soit n un entier naturel.

- Produit : $|z_1z_2|=|z_1|\times|z_2|$ et $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$.
- Inverse : $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)$.
- Quotient : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$.
- Puissance : $\left|z^n\right|=|z|^n$ et $\arg\left(z^n\right)=n\arg(z)$.

Il est donc important de penser à utiliser la forme trigonométrique dans les calculs faisant intervenir des produits, des puissances ou des quotients.

▶ Exemple 10

Donner la forme trigonométrique puis la forme algébrique de $z_1=(1+i)^6$ et de
$$z_2=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

▶ **Solution**

Pour z_1, on cherche d'abord la forme trigonométrique $1+i$ qui est ensuite élevé à la puissance 6.

En procédant comme dans l'exemple 9 (on peut aussi s'aider de la représentation graphique), on trouve

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),\ \text{d'où :}$$

$$z_1=(1+\mathrm{i})^6=\left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(6\times\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(6\times\frac{\pi}{4}\right)\right),\ \text{soit}$$

$$z_1=(1+\mathrm{i})^6=8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$ ce qui est la forme trigonométrique de z_1.

On en déduit la forme algébrique : $z_1=(1+\mathrm{i})^6=-8\,\mathrm{i}$.

Pour z_2, on cherche la forme trigonométrique du numérateur et du dénominateur. Grâce aux valeurs remarquables des sinus et cosinus, on reconnaît des nombres de module 1 et on obtient :

$$z_2=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right).$$

La forme trigonométrique de z_2 est donc $z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et on en déduit sa forme algébrique : $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

Avec un peu d'habitude et de familiarité avec ces quantités, on reconnaît rapidement les valeurs remarquables et les calculs deviennent assez aisés.

3. Écriture exponentielle

Pour terminer ce chapitre, on donne une nouvelle écriture d'un nombre complexe non nul.

Par elle-même, cette écriture résume les propriétés précédentes des arguments et facilite la mémorisation des propriétés de la forme trigonométrique des nombres complexes.

Nous avons rappelé, dans les prérequis, la relation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle : la fonction exponentielle est la seule fonction non nulle et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0)=1$ et, pour tous réel a et b, $f(a+b)=f(a)\times f(b)$.

On remarque que les fonctions $f_k : x \mapsto f_k(x)=\mathrm{e}^{kx}$ sont aussi non nulles et dérivables sur $\mathbb{R}$ telle que $f_k'(0)=k$ et, pour tous réel a et b, $f_k(a+b)=f_k(a)\times f_k(b)$.

On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $g:\theta\mapsto\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=g(\theta)$. D'après les calculs faits précédemment, on a :

$$\begin{aligned}g(\theta_1)\times g(\theta_2)&=(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)=g(\theta_1+\theta_2).\end{aligned}$$

Admettons que l'on puisse dériver cette fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, comme les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On obtient $g'(\theta)=-\sin\theta+i\cos\theta$ et donc $g'(0)=i$.

Par analogie avec les fonctions f_k on note donc la fonction g de la même façon : $g(\theta)=e^{i\theta}$ soit $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$.

Définition 7

La notation $e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument θ :

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}.$$

Conséquence On peut utiliser cette notation exponentielle pour écrire les nombres complexes non nuls sous forme trigonométrique : $z=|z|e^{i\theta}$.

▶ Exemples On a :

$e^{i\frac{\pi}{2}}=i$;

$e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ puisque $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

À savoir

$\boxed{e^{i\pi}=-1}$

Dans cette égalité, on trouve :

- -1 : un entier négatif ;
- e : nombre réel qui est utilisé pour noter la fonction exponentielle, essentiel pour cette fonction et pour la fonction logarithme népérien ;
- i : nombre mystérieux, imaginaire au XVIe siècle, et dont l'invention audacieuse ($i^2=-1$) ouvre tout un monde aux mathématiques ;
- π : longueur d'un cercle de rayon 1 dont on trouve une valeur approchée, $\frac{256}{81}$, dans un papyrus égyptien daté d'environ -1800 avant J.-C., dont la recherche des décimales est devenu un test pour les ordinateurs les plus puissants et les programmeurs les plus compétents et que vous rencontrerez… dans le cours de statistiques !

Conséquence La propriété 20 s'écrit alors :

Propriété 22

Soit trois nombres complexes non nuls $z=|z|e^{i\theta}$, $z_1=|z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2=|z_2|e^{i\theta_2}$, et n un entier naturel.

- Produit : $z_1z_2=|z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$; • Puissance : $z^n=|z|^n e^{ni\theta}$;

▶▶

Propriété 22 (suite)

- Inverse : $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{|z|}e^{-i\theta}$;
- Quotient : $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

C'est évidemment très agréable pour mémoriser et utiliser tous ces résultats.

Reprenons par exemple les calculs de l'exemple 10.

On a $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ d'où $z_1=(1+i)^6=\sqrt{2}^6e^{i\frac{\pi}{4}\times 6}=8e^{i\frac{3\pi}{2}}=-8\,i$.

Et $z_2=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i}{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}=e^{-i\frac{\pi}{6}}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Propriété 23

Notation exponentielle et conjugué

$$\overline{\left(e^{i\theta}\right)}=e^{-i\theta}$$

Démonstration

$$\overline{\left(e^{i\theta}\right)}=\overline{(\cos\theta+i\sin\theta)}=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=e^{-i\theta}.$$

6. Les nombres complexes et les formules de trigonométrie

Ce sont les formules de trigonométrie démontrées en Première qui ont mené à la relation

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

et aux propriétés des arguments dans les produits et les quotients, propriétés qui sont résumées par la notation exponentielle.

En retour, les nombres complexes permettent de retenir les formules d'addition et de soustraction, ainsi que les formules de duplication. De nouvelles formules peuvent aussi être démontrées.

Il suffit pour cela d'avoir mémorisé l'égalité $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ et d'utiliser les propriétés connues des opérations et des exposants.

Exemple

- Par l'égalité $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, on retrouve

$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$ soit

$(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$.

Et en utilisant l'égalité des parties réelles et des parties imaginaires, on retrouve :

$$\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2=\cos(\theta_1+\theta_2)$$
$$(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2=\sin(\theta_1+\theta_2).$$

- Calculons $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2$ par deux méthodes.
- En utilisant l'identité remarquable :

$$\begin{aligned}(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2&=(\cos\alpha)^2+2i(\sin\alpha)(\cos\alpha)+i^2(\sin\alpha)^2\\&=(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2+2i(\sin\alpha)(\cos\alpha)\end{aligned}$$

- En utilisant la notation exponentielle des nombres complexes :

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=(e^{i\alpha})^2=e^{i2\alpha}=(\cos 2\alpha)+i(\sin 2\alpha)$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires on arrive à :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2\alpha&=(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2\\\sin 2\alpha&=2(\sin\alpha)(\cos\alpha)\end{aligned}\ .}$$

On retrouve les formules de duplication vues en classe de Première.

D'autres formules seront démontrées en exercice.

D Exercices d'apprentissage

Dans tous ces exercices, on utilisera les facilités fournies par la notation exponentielle.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Exercice 6 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants et placer leurs images dans le plan muni d'un repère orthonormé direct.

a) $z_1=-1-i$ **b)** $z_2=1+i\sqrt{3}$ **c)** $z_3=-7$ **d)** $z_4=-5i$.

Exercice 7 Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

a) $z_1=(1-i)^5$ (on donnera ensuite la forme algébrique de z_1)

b) $z_2=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-3+3i\right)$ **c)** $z_3=\dfrac{1}{i}$ **d)** $z_4=\dfrac{2-2i}{\sqrt{3}+i}$ **e)** $z_5=\dfrac{(2-2i)^3}{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}$.

Exercice 8 En calculant le produit $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique, déterminer le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 9 En calculant $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$ de deux façons différentes, exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

Exercice 10 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère trois points distincts A, B et C, d'affixes z_A, z_B et z_C.

❶ Donner une interprétation géométrique de $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$.

❷ Quel est le vecteur image du nombre complexe $z_B - z_A$? Donner la signification géométrique de $\arg(z_B - z_A)$. En déduire la signification géométrique de $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

❸ Application

Déterminer la forme algébrique puis la forme trigonométrique de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ avec $z_A = 2i$, $z_B = 1 + 5i$ et $z_C = -3 + 3i$. En déduire la nature du triangle ABC.

4 Synthèse

A Synthèse de la séquence

1. Définition

Théorème 1

(Admis)

Il existe un ensemble, l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition, d'une multiplication (et donc d'une soustraction et d'une division) qui possèdent les mêmes règles de calcul que dans l'ensemble des nombres réels ;
- il existe, dans $\mathbb{C}$, un nombre i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$;
- tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$, où a et b sont des nombres réels.

Définitions

- L'écriture $a + \mathrm{i}b$, a et b étant réels, s'appelle **la forme algébrique** du nombre complexe z tel que $z = a + \mathrm{i}b$.
- $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.
- $z = \mathrm{i}b$ est un imaginaire pur (le réel 0 est aussi considéré comme un imaginaire pur).

Propriété

- Nombre complexe nul : $a + \mathrm{i}b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.
- Égalité : $a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$ (où a, b, a' et b' sont réels).

2. Opérations

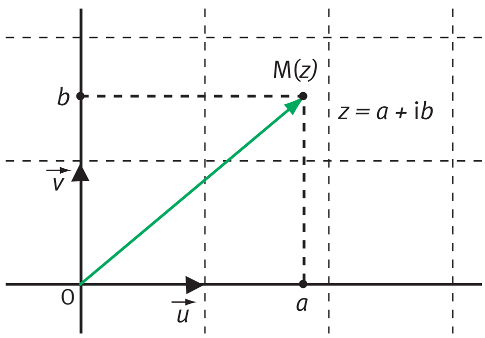
Propriété 2

Pour tous nombres complexes $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$, a, b, a' et b' étant des nombres réels, on a :

- $z+z'=(a+a')+\mathrm{i}(b+b')$
- $zz'=(aa'-bb')+\mathrm{i}(ab'+a'b)$
- $kz=ka+\mathrm{i}kb$ pour tout réel k
- $\dfrac{1}{z}=\dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\mathrm{i}\dfrac{b}{a^2+b^2}$ si $z\neq 0$.

3. Représentation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

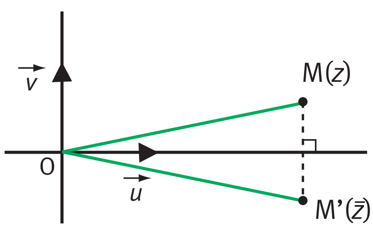


4. Conjugaison

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z=a+\mathrm{i}b$ (a et b réels) est le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par : $\bar{z}=a-\mathrm{i}b$.

Remarque



Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' :

a) $\overline{\overline{z}} = z$;

b) pour tout réel λ, $\overline{\lambda} = \lambda$ et, pour tout imaginaire pur ib, $\overline{ib} = -ib$;

c) $z\overline{z} = a^2 + b^2$, et donc $z\overline{z}$ est réel ;

d) $z + \overline{z} = 2a = 2\text{Re}(z)$, $\text{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $z - \overline{z} = 2ib = 2i\,\text{Im}(z)$,
$\text{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$;

e) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;

f) $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; cas particuliers : pour tout λ réel, $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$ et donc $\overline{-z} = -\overline{z}$;

g) pour tout $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$;

h) pour tout entier n dans $\mathbb{Z}$, $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$.

5. Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété

Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) $az^2 + bz + c = 0$, les nombres a, b et c étant des nombres réels avec $a \neq 0$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on appelle S l'ensemble des solutions de (E).

- Si $\Delta > 0$, $S = \left\{ \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$.
- Si $\Delta = 0$, $S = \left\{ \dfrac{-b}{2a} \right\}$.
- Si $\Delta < 0$, $S = \left\{ \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$.

6. Module d'un nombre complexe

Définition

On appelle module d'un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels) le nombre réel positif, noté $|z|$, défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propriété

Le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

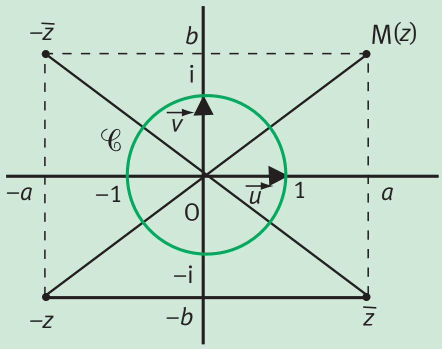
Propriété

Interprétation géométrique du module

Soit un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels) et M son image dans un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, alors $|z| = \mathrm{OM}$.

Propriété

Pour tout nombre complexe z : $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$.



Propriété

Pour tout nombre complexe z, on a $z\bar{z} = |z|^2$.

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

a) $|zz'| = |z| \times |z'|$; $|z^n| = |z|^n$ pour tout entier naturel n ;

b) pour $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$;

c) pour $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$;

d) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Remarque On peut préférer retenir les cas **a)**, **b)** et **c)** par des phrases :

- Le module d'un produit est égal au produit des modules.
- Le module de l'inverse d'un nombre complexe non nul est égal à l'inverse de son module.
- Le module d'un quotient est égal au quotient des modules.

Propriété

Soit M le point d'affixe z et M_0 le point d'affixe z_0.

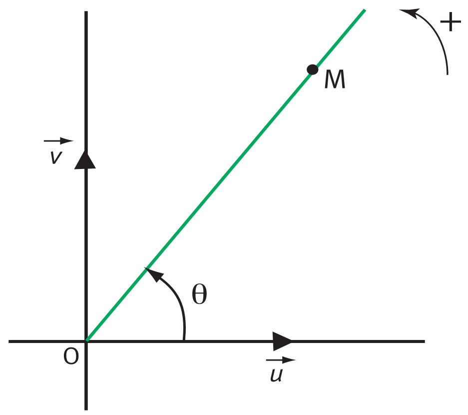
On a alors $|z - z_0| = M_0M$.

4. Argument d'un nombre complexe non nul

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul et M son image. On appelle argument de z, et on note $\arg z$, n'importe quelle mesure, exprimée en radians, de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$.



Remarque Le nombre 0 n'a pas d'argument.

3. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition

Lorsqu'un nombre complexe non nul z est écrit sous la forme $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, on dit que le nombre z est écrit sous forme trigonométrique.

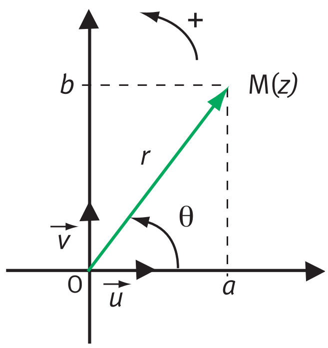
Propriété

Égalité de deux nombres écrits sous forme trigonométrique

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument (à 2π près).

Conséquence Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.

$z=a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\cos\theta+ir\sin\theta$:



$a = r\cos\theta$
$b = r\sin\theta$

$$\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta=\dfrac{a}{r} \text{ et } \sin\theta=\dfrac{b}{r} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a=r\cos\theta \\ b=r\sin\theta \end{cases}.$$

Propriété

La forme trigonométrique et les produits, puissances et quotients

Soit trois nombres complexes non nuls z, z_1 et z_2, et soit n un entier naturel.

- Produit : $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
- Inverse : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.
- Quotient : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.
- Puissance : $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

9. La notation exponentielle

Définition

La notation $e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument θ :

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

À savoir

$e^{i\pi} = -1$

Propriété

La forme exponentielle et les produits, puissances et quotients

Soit trois nombres complexes non nuls $z = |z|e^{i\theta}$, $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, et n un entier naturel.

- Produit : $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- Puissance : $z^n = |z|^n e^{ni\theta}$
- Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta}$
- Quotient : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Propriété

Notation exponentielle et conjugué : $\overline{\left(e^{i\theta}\right)} = e^{-i\theta}$.

La notation exponentielle et les formules de trigonométrie : la notation exponentielle permet de retenir les formules d'addition et de soustraction, ainsi que les formules de duplication, elle permet aussi d'en démontrer de nouvelles

10. Plusieurs points de vue

Dans ce nouvel ensemble de nombres, plusieurs points de vue sont utilisés, de nouveaux outils sont introduits. Vous devez vous familiariser avec chacun d'eux.

Les différentes caractérisations des nombres réels et des imaginaires purs en donnent des exemples : forme algébrique, interprétation géométrique, conjugaison, forme trigonométrique.

Propriété

Caractérisation d'un nombre réel :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{M}(z) \in (\mathrm{O}y)$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$.
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Propriété

Caractérisation d'un imaginaire pur :

- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$.
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{M}(z) \in (\mathrm{O}y)$.
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$.
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

B Exercices de synthèse

Exercice I

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $2z^3+(1-4\text{i})z^2+(1-2\text{i})z-2\text{i}=0$.

❶ Déterminer un nombre imaginaire pur z_0 solution de l'équation (E).

❷ Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que

$$2z^3+(1-4\text{i})z^2+(1-2\text{i})z-2\text{i}=(z-z_0)\left(az^2+bz+c\right).$$

❸ Résoudre l'équation (E).

Exercice II

❶ Soit Z un nombre complexe de module 1, montrer en utilisant l'écriture exponentielle que $Z+\dfrac{1}{Z}$ est un nombre réel.

❷ Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et de même module, montrer que $\dfrac{(z+z')^2}{zz'}$ est un nombre réel.

Exercice III

❶ Montrer que, pour tous nombres complexes z et z', on a

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2\right).$$

❷ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$, interpréter géométriquement l'égalité précédente.

Exercice IV

Cet exercice est un QCM.

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Remarque Il n'est pas nécessaire de faire beaucoup de calculs !

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

❶ Une solution de l'équation $3z+2\bar{z}=5+2\text{i}$ est :

a) 3 b) i c) $1+2\text{i}$.

❷ Soit z un nombre complexe, $|z+\text{i}|$ est égal à :

a) $|z|+1$ b) $|z-1|$ c) $|\text{i}\bar{z}+1|$.

❸ Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+\text{i}\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a) $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ b) $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ c) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$.

❹ Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a) $n=3$
b) $n=6k+3$ avec k entier relatif
c) $n=6k$ avec k entier relatif.

❺ Soit A et B deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\mathrm{i}|=|z+1|$ est :

a) une droite b) un cercle c) un point.

❻ Soit Ω le point d'affixe $1+\mathrm{i}$. L'ensemble des points d'affixe z vérifiant $(z-(1+\mathrm{i}))(\overline{z}-(1-\mathrm{i}))=5$ est :

a) une droite b) un cercle c) un point.

❼ L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :

a) $\{1-\mathrm{i}\}$ b) l'ensemble vide c) $\{1-\mathrm{i}\,;1+\mathrm{i}\}$.

Exercice V

Trois méthodes

Soit z un nombre complexe différent de i et soit M son image dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$. On appelle A le point d'affixe i. On pose $Z=\dfrac{z+2}{z-\mathrm{i}}$. On appelle (E) l'ensemble des points M du plan tels que Z soit imaginaire pur.

❶ Déterminer l'ensemble (E) en utilisant la forme algébrique de z et de Z.

❷ Déterminer l'ensemble (E) en utilisant l'interprétation géométrique de la forme trigonométrique de Z (on utilisera les résultats de l'exercice 10).

❸ Déterminer l'ensemble (E) en utilisant l'équivalence
« Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{Z}=-Z$ » puis en utilisant la forme algébrique de z.

■