

# Séquence 3

## Probabilité : conditionnement et indépendance

### Sommaire

---

1. Pré-requis
2. Conditionnement par un événement de probabilité non nulle
3. Indépendance
4. Synthèse

Dans cette première séquence sur les probabilités, on complète les connaissances des années précédentes en introduisant deux notions nouvelles : les probabilités conditionnelles et l'indépendance de deux événements.

Il sera alors possible d'étudier des situations moins simples et plus riches.

# 1

# Pré-requis

## A

## Définitions et vocabulaire des événements

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs résultats sont possibles, sans que l'on puisse prévoir celui qui se produira. Les résultats possibles sont aussi appelés les issues ou les éventualités. Dans l'étude d'une expérience aléatoire, les notions ci-dessous sont fondamentales.

- **Univers** : c'est l'ensemble de toutes les éventualités de l'expérience aléatoire, il est souvent noté  $\Omega$ .
- **Événement** : c'est un sous-ensemble de l'univers.
- **Événement élémentaire** : un événement constitué d'une seule éventualité.
- **Événement certain** : c'est l'univers lui-même  $\Omega$ .
- **Événement impossible** : c'est l'ensemble vide  $\emptyset = \{ \}$ .
- L'**intersection** de deux événements  $A$  et  $B$ , notée  $A \cap B$  (qui s'écrit aussi «  $A$  et  $B$  ») contient toutes les éventualités qui sont en même temps dans  $A$  et dans  $B$ .
- L'**union** de deux événements  $A$  et  $B$ , notée  $A \cup B$  (qui s'écrit aussi «  $A$  ou  $B$  »), contient toutes les éventualités qui appartiennent à au moins un des deux événements.
- Deux événements  $A$  et  $B$  sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément, ce qui se traduit par  $A \cap B = \emptyset$ .
- On appelle **événement contraire** de  $A$ , et on le note  $\bar{A}$ , l'événement constitué par toutes les issues de l'univers  $\Omega$  qui n'appartiennent pas à  $A$ . On a donc :

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \text{ et } A \cup \bar{A} = \Omega.$$

► **Exemple** Pour illustrer toute cette partie, nous prendrons l'exemple du lancement d'un dé cubique bien équilibré.

- On a :  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- « Obtenir un multiple de 3 » est un événement, notons le  $A$ , alors  $A = \{3, 6\}$  ;  
« obtenir un nombre strictement inférieur à 5 » est un événement, notons le  $B$ , alors  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ .
- L'événement  $\{3\}$  est un événement élémentaire.

- On a :  $A \cap B = \{3, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{3\}$ .
- On a :  $A \cup B = \{3, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .
- Soit  $C$  l'événement « obtenir un nombre inférieur à 2 », on a alors  $C = \{1, 2\}$ .  
Les événements  $A$  et  $C$  sont incompatibles car  $A \cap C = \{3, 6\} \cap \{1, 2\} = \emptyset$ .
- On a :  $A = \{3, 6\}$  et  $\bar{A} = \{1, 2, 4, 5\}$ .

## B Loi de probabilité

### Définition

On dit qu'on définit une loi de probabilité  $P$  sur l'univers  $\Omega$  d'une expérience aléatoire ayant un nombre fini d'éventualités :

- si à chaque éventualité  $a_i$  on associe un nombre réel  $p_i$  tel que tous les nombres  $p_i$  vérifient  $0 \leq p_i \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$ ,
- et si à chaque événement  $A$  est associée le nombre  $P(A)$  défini par  $p(A) = \sum_{a_i \in A} p_i$ , c'est-à-dire que si  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  alors  $P(A) = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ .

**Remarque** Pour un événement élémentaire  $\{a_i\}$ , on a  $P(\{a_i\}) = p_i$ , noté aussi  $P(a_i) = p_i$ .

### Propriétés

Quels que soient les événements  $A$  et  $B$ , on a les propriétés suivantes :

- $0 \leq P(A) \leq 1$ .
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
- $P(\Omega) = 1$  (car  $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$ ) et  $P(\emptyset) = 0$ .
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, c'est-à-dire si  $A \cap B = \emptyset$ , on a alors :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- Si les  $n$  événements  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  sont incompatibles deux à deux (c'est-à-dire que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  quels que soient  $i$  et  $j$ ), on a alors  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ .

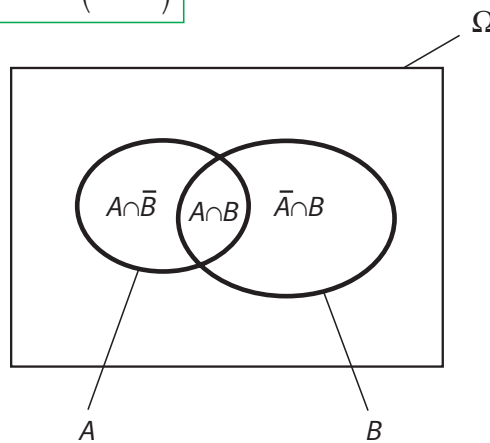
- Exemple On lance un dé cubique. Choisissons de supposer que ce dé est bien équilibré, non truqué et nous associons à chacune des six éventualités le nombre  $\frac{1}{6}$ .

Nous obtenons donc :

- $P(A) = P(\{3, 6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$ ,  $P(B) = P(\{1, 2, 3, 4\}) = \frac{4}{6}$ ,
- $P(A) = \frac{2}{6}$  et  $P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$ ,
- $P(A \cap B) = P(\{3\}) = \frac{1}{6}$  et  $P(A \cup B) = P(\{1, 2, 3, 4, 6\}) = \frac{5}{6}$ ,
- $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$  ; on retrouve ainsi  $P(A \cup B)$  qui a été déterminé ci-dessus à partir de  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

### Des événements incompatibles importants

Soit  $A$  et  $B$  deux événements. Les événements  $A \cap B$  et  $A \cap \bar{B}$  n'ont aucune éventualité commune, ils sont incompatibles et, comme  $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ , on a  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ .



Les différents événements peuvent être aussi représentés dans un tableau :

	$A$	$\bar{A}$
$B$	$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$
$\bar{B}$	$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$

### Une loi très importante : la loi équirépartie

#### Définition

La loi de probabilité pour laquelle tous les événements élémentaires ont des probabilités égales s'appelle la **loi équirépartie**. On dit aussi qu'il y a **équiprobabilité**.

### Propriétés

Si, pour l'univers d'une expérience aléatoire ayant  $n$  issues, on a choisi la loi équirépartie alors :

- la probabilité de chaque événement élémentaire est  $\frac{1}{n}$ ;
- la probabilité d'un événement  $A$  est telle que  $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ ,  $\text{card}(A)$  désignant le nombre d'issues de  $A$ . On utilise aussi souvent l'expression

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

## C

# Variable aléatoire

### Définition

On dit qu'on définit une **variable aléatoire** sur l'ensemble  $\Omega$  lorsqu'on associe un nombre réel à chaque éventualité de l'expérience aléatoire.

### Définition

La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire  $X$  est donnée par :

- l'ensemble des valeurs  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  prises par la variable aléatoire,
- les probabilités  $P(X = x_i)$  pour toutes les valeurs  $x_i$  prises par  $X$ .

### Définition

L'espérance de la variable aléatoire  $X$  est le nombre, noté  $E(X)$ , défini par :

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots + x_r P(X = x_r) \\ &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r = \sum_{i=1}^{i=r} x_i p_i. \end{aligned}$$

### Définition

La variance  $V(X)$  et l'écart-type  $\sigma(X)$  d'une variable aléatoire  $X$  sont définis par :  $V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots + (x_r - E(X))^2 p_r$

$$= \sum_{i=1}^{i=r} (x_i - E(X))^2 p_i, \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

### Propriété

Si  $X$  est une variable aléatoire, on a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

- Exemple On lance un dé. Si on obtient 6, on gagne 10 €, si on obtient 1, on perd 5 € et, si on obtient un autre résultat, on perd 1 €.

Soit  $X$  le gain obtenu pour un lancer. Les valeurs prises par la variable aléatoire  $X$  sont 10, -5 et -1. La loi de probabilité de  $X$  est donnée dans le tableau :

$x_j$	10	-5	-1
$P(X = x_j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} - 5 \times \frac{1}{6} - 1 \times \frac{4}{6} = \frac{1}{6} \text{ et}$$

$$V(X) = 10^2 \times \frac{1}{6} + (-5)^2 \times \frac{1}{6} + (-1)^2 \times \frac{4}{6} - (E(X))^2 = \frac{755}{36} \approx 20,97.$$

### Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve aléatoire comportant deux issues, l'une appelée « succès », l'autre appelée « échec ».

Soit  $X$  la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de réussite et la valeur 0 en cas d'échec.

La variable aléatoire  $X$  est appelée **variable de Bernoulli** et la loi de probabilité de  $X$  est appelée **loi de Bernoulli**.

On note  $p$  la probabilité de réussir et donc  $q = 1 - p$  la probabilité d'échouer.

D'où  $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = q = 1 - p$ .

Loi de probabilité d'une variable de Bernoulli :

$x_j$	1	0
$P(X = x_j)$	$p$	$1 - p$

# D

## Expériences identiques et indépendantes

Précisons ce que désigne l'expression « répétition d'expériences identiques ».

- Cela signifie que les conditions dans lesquelles on répète l'expérience sont les mêmes. Par exemple, les tirages de boules ou de jetons se font « avec remise » de l'objet tiré après chaque tirage.
- Cela signifie aussi qu'une expérience ne dépend pas du résultat de l'expérience précédente. De manière imagée, on peut dire que les pièces ou les dés n'ont pas de mémoire.
- Bien entendu, cela ne signifie pas que les résultats de ces expériences répétées sont les mêmes, puisqu'il s'agit d'expériences aléatoires.

### Propriétés

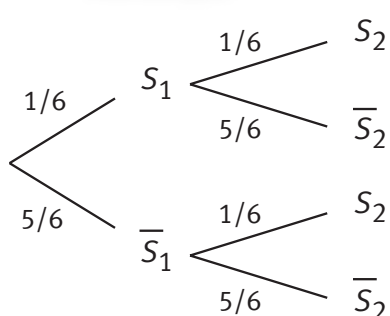
On considère une expérience aléatoire formée par la répétition d'expériences identiques ayant chacune deux éventualités.

En cohérence avec les simulations, on définit une loi de probabilité sur l'univers des  $2^n$  éventualités de la façon suivante.

La probabilité d'une liste de  $n$  résultats est le produit des probabilités de chacun des  $n$  résultats partiels qui la constituent.

On admet que cela définit bien une loi de probabilité et, pour exprimer qu'on choisit cette loi de probabilité, on dit qu'on utilise le modèle de la répétition d'épreuves identiques et indépendantes, ou, plus brièvement, que les expériences sont **identiques et indépendantes**.

**Remarque** En Terminale, on va donner une définition plus générale de l'indépendance.



Les arbres pondérés, où on indique sur chaque branche la probabilité d'obtenir chaque résultat partiel, permet d'utiliser très facilement la propriété précédente.

On lance un dé cubique deux fois de suite. La probabilité d'obtenir six deux fois de suite est le produit des probabilités de chaque branche du chemin correspondant (on note  $S_1$  l'événement « obtenir six au premier lancer », de même pour  $S_2$ ):

$$P(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}.$$

### Définition

Soit  $X$  la variable aléatoire définie par le *nombre de succès* dans la répétition  $n$  fois, de façon indépendante, d'une épreuve ayant deux issues, succès et échec, pour la quelle la probabilité du succès est égale à  $p$ .

La loi de probabilité de  $X$  s'appelle **la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$** , notée  $\mathcal{B}(n; p)$ .

### Propriété

La variable aléatoire  $X$  prend les  $n+1$  valeurs  $0, 1, \dots, n$  avec les probabilités :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ pour tout entier } k$$

tel que  $0 \leq k \leq n$ .

$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1-p).$$

Le nombre  $\binom{n}{k}$  s'appelle un **coefficient binomial**.

### Calculatrices et tableurs : coefficients binomiaux.

Pour la calculatrice TI-82 *Stats.fr*, on utilise la fonctionnalité Combinaison (ou nCr) qui se trouve dans **Maths** PRB.

Pour la calculatrice Casio Graph 25+Pro, on tape aussi 4 nCr 2, nCr est obtenu par **OPTN** **F6** PROB.

Sur le tableur OpenOffice, on utilise la fonctionnalité Combin( $n;k$ ).

### Calculatrices et tableurs : loi binomiale.

Les tableurs et la plupart des calculatrices permettent d'obtenir directement les valeurs  $P(X = k)$  d'une loi binomiale et aussi les probabilités  $P(X \leq k)$ .

- Avec un tableur

La syntaxe LOI.BINOMIALE( $k; n; p; \text{FAUX}$ ) ou LOI.BINOMIALE( $k; n; p; 0$ ) renvoie la probabilité  $P(X = k)$  pour une variable aléatoire  $X$  de loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ .

La syntaxe LOI.BINOMIALE( $k; n; p; \text{VRAI}$ ) ou LOI.BINOMIALE( $k; n; p; 1$ ) renvoie la probabilité cumulée  $P(X \leq k)$ .

- Avec une calculatrice TI

Pour calculer  $P(X = k)$  lorsque  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n; p)$ , on utilise l'instruction binomFdp (que l'on obtient par l'instruction DISTR (touches 2ND VARS) et la touche 0) que l'on complète ainsi : binomFdp( $n, p, k$ ).

Ces calculatrices donnent aussi les probabilités  $P(X \leq k)$  par l'instruction binomFREPdp.

- Avec une calculatrice Casio graph 25+Pro

Pour cette calculatrice, pour calculer  $P(X = k)$ , il faut taper la formule

$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  ou avoir implanté sur la calculatrice le petit programme :

"N = "? → N ↵

"p = "? → p ↵

"K = "? → K ↵

N Cr K → C ↵

C × p ^ K × (1-p) ^ (N-K) → B ↵

"P(X = K) = " ▲ B ▲



- Avec une calculatrice Casio graph 35+

Pour calculer  $P(X = k)$  lorsque  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n; p)$ , on utilise le menu STAT, on choisit DIST (touche F5) puis BINM (touche F5), Bpd (touche F1) et Var (touche F2).

On renseigne la boîte de dialogue : Data : variable ; valeur désirée :  $k$  ; Numtrial :  $n$  ; probabilité :  $p$ .

Pour obtenir les probabilités  $P(X \leq k)$ , dans le menu STAT, on saisit dans la Liste 1 les valeurs possibles pour  $k$  : 0, 1, 2, ...,  $n$ .

On choisit ensuite DIST (touche F5) puis BINM (touche F5), Bcd (touche F2).

On renseigne la boîte de dialogue comme ci-dessus, sauf pour Data où on choisit List.

Pour chaque valeur de  $k$ , la probabilité  $P(X \leq k)$  est affichée dans une liste.

### Propriété

Pour tout entier naturel  $n$ , non nul, et tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , on a :

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{et, si } 0 \leq k \leq n-1,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

## E

## Simulations d'expériences aléatoires

Admettons provisoirement (voir séquence 8) que si  $a$  et  $b$  ( $a < b$ ) sont deux réels de  $[0 ; 1]$  alors la probabilité qu'un nombre choisi au hasard dans l'intervalle  $[0 ; 1]$  appartienne à  $[a ; b]$  est  $(b-a)$ .

L'exemple ci-dessous nous montre comment cette remarque peut être utile pour les simulations.

- Exemple Dans une grande entreprise, 37% des salariés passent leurs vacances à l'étranger. On désire simuler l'expérience aléatoire consistant à choisir une personne de l'entreprise au hasard et à s'intéresser à sa destination de vacances. On peut simuler cette expérience aléatoire de la façon suivante.

Si Random  $< 0,37$  alors Afficher « cette personne passe ses vacances à l'étranger »  
Sinon Afficher « cette personne ne passe pas ses vacances à l'étranger ».

# 2

## Conditionnement par un événement de probabilité non nulle

### A

### Objectifs du chapitre

On définit les probabilités conditionnelles.

On justifie et on élargit l'utilisation des arbres pondérés.

On aborde de nouvelles situations : tirages sans remise, enchaînement d'expériences non indépendantes...

### B

### Pour débiter

#### ■ Activité 1

#### Tri sélectif

Une enquête portant sur le tri sélectif des déchets ménagers a été réalisée et 2000 personnes ont été interrogées. On leur a posé la question : « Triez-vous le verre et le papier ? ».

Voici les résultats pour les effectifs :

Age \ Tri	Oui	Non	Total par ligne
Moins de 40 ans : $J$	700	400	1100
Plus de 40 ans : $\bar{J}$	500	400	900
Total par colonne	1200	800	2000 : Total général

- 1 On choisit au hasard une personne parmi les 2000 personnes interrogées. On note  $T$  l'événement « la personne fait le tri sélectif » et  $J$  l'événement « la personne a moins de 40 ans ». Donner les probabilités  $P(T)$ ,  $P(J)$  et  $P(T \cap J)$ .
- 2 Maintenant, parmi les personnes faisant du tri sélectif, on choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 40 ans ?
- 3 Parmi les personnes de moins de 40 ans, on choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle fasse du tri sélectif ?

#### ■ Activité 2

- 1 Analyser l'algorithme suivant (extrait d'un document-ressource sur l'algorithme proposé par l'inspection).

## Rappel

Un booléen est un type de variable qui ne prend que deux valeurs, 0 ou 1, vrai ou faux.

### Variables

dates : tableau des trente jours d'anniversaire

trouvé : un booléen qui indique si deux dates coïncident.

$k, p$  : deux compteurs de boucles.

### Initialisation

Pour  $k$  de 1 à 30

dates[ $k$ ] prend une valeur entière aléatoire comprise entre 1 et 365 inclus

trouvé prend la valeur faux

### Traitement

Pour  $k$  de 1 à 29

Pour  $p$  de  $k+1$  à 30

Si dates[ $k$ ] = dates[ $p$ ] alors

trouvé prend la valeur vrai

Sortie

Affiche trouvé

- 2 Compléter cet algorithme pour obtenir un algorithme qui donne la fréquence des groupes où il existe des coïncidences d'anniversaires dans 1000 groupes de 30 personnes.
- 3 Faire fonctionner cet algorithme à l'aide d'un logiciel comme Algobox et donner la fréquence obtenue, qu'en pensez-vous ?

## C Cours

### 1. Définition

#### Définition 1

Soient  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers  $\Omega$  tels que  $P(A) \neq 0$ .

On appelle **probabilité de l'événement  $B$  sachant que  $A$  est réalisé** le nombre, noté  $P_A(B)$ , lu «  $P$  de  $B$  sachant  $A$  », défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

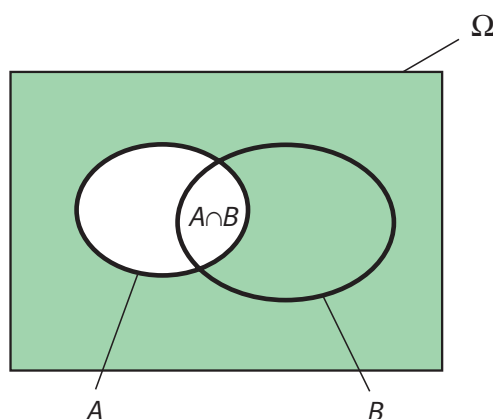
### Remarque

- $P_A(A) = 1$ ,  $0 \leq P_A(B) \leq 1$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont deux événements incompatibles (c'est-à-dire si  $A \cap B = \emptyset$ ), on a  $P(A \cap B) = 0$  donc  $P_A(B) = 0$ .

- Cas particulier de la loi équirépartie

$$P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)} \text{ car } \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)}}{\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}.$$

Ce cas particulier met bien en évidence l'idée qu'on a changé d'univers : c'est  $A$  qui est l'univers muni de la loi de probabilité  $P_A$ .



## 2. Probabilité d'une intersection

### Propriété 1

Soient  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ .

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \text{ et } P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

### ■ Démonstration

La première égalité s'obtient en multipliant les membres de l'égalité de la définition de  $P_A(B)$  par  $P(A)$ . La seconde égalité est analogue en permutant les rôles de  $A$  et  $B$ .

### Remarque

Ces égalités sont très importantes, elles font le lien entre les probabilités conditionnelles et les probabilités des intersections.

Dans la pratique, on connaît souvent des probabilités conditionnelles et on cherche des probabilités d'intersections.



Il ne faut pas confondre  $P(A \cap B)$ ,  $P_A(B)$  et  $P_B(A)$ .

Il faut donc bien **savoir reconnaître une probabilité conditionnelle** dans un énoncé.

Les expressions « sachant que... », « quand... », « lorsque... », « parmi... » sont souvent utilisées pour donner une probabilité conditionnelle. En effet, ces expressions annoncent que l'univers change, qu'il n'est qu'une partie de l'univers initial. C'est ce nouvel univers qui exprime le conditionnement et qui sera noté en indice.

Si on utilise la loi équirépartie avec des données en pourcentage, il faut bien regarder la signification de chaque pourcentage.

► **Exemple 1** Dans une urne, on place cinq boules, deux noires et trois rouges. On tire au hasard deux boules, successivement et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux boules noires ?

► **Solution** On note  $N_1$  l'événement « la première boule tirée est noire »,  $N_2$  l'événement « la seconde boule tirée est noire ». On cherche  $P(N_1 \cap N_2)$ .

On a  $P(N_1) = \frac{2}{5}$  car on utilise la loi équirépartie, l'univers ayant 5 éventualités.

Et  $P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{4}$  car, lorsque la première boule est tirée, il ne reste que 4 boules dont l'ensemble forme le nouvel univers et une seule est noire.

Donc  $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ .

► **Exemple 2** Dans un collège, les élèves inscrits à l'association sportive peuvent choisir le volley-ball ou le basket.

Parmi les inscrits, il y a 54 % de filles et 40 % des filles ont choisi le volley-ball.

On considère l'univers formé par l'ensemble des élèves membres de l'association sportive. On note  $F$  l'événement « l'élève est une fille » et  $V$  l'événement « l'élève pratique le volley-ball ».

On rencontre par hasard un(e) élève de cette association.

① Exprimer les données de l'énoncé avec des probabilités.

② Déterminer la probabilité de l'événement  $E$ : « l'élève est une fille et pratique le volley-ball ».

► **Solution** ① La rencontre se faisant au hasard on utilise la loi équirépartie.

On a donc  $P(F) = \frac{\text{nombre de filles}}{\text{nombre d'inscrits}} = 0,54$  car il y a 54 % de filles parmi les inscrits.

La donnée « 40 % des filles ont choisi le volley-ball » se traduit par une probabilité conditionnelle car l'univers est restreint ici à l'ensemble  $F$ . On obtient donc  $P_F(V) = 0,40$ .

② L'événement  $E$  est l'événement  $F \cap V$ , on obtient donc

$$P(E) = P(F \cap V) = P(F) \times P_F(V) = 0,54 \times 0,40 = 0,216.$$

### 3. Probabilité conditionnelle d'un événement contraire

#### Propriété 2

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$$

#### ■ Démonstration

On sait que  $P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$ .

On a vu dans les pré-requis que

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}),$$

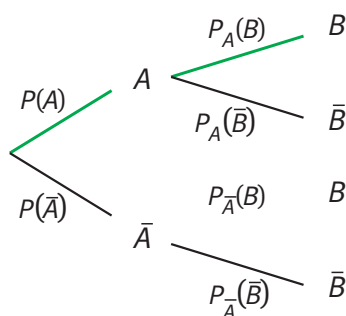
donc  $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\text{et } P_A(\bar{B}) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P_A(B).$$

Dans l'exemple 2 on obtient ainsi que  $P_F(\bar{V}) = 1 - P_F(V) = 0,60$ . Ainsi 60 % des filles n'ont pas choisi le volley.

### 4. Arbre pondéré pour deux événements

#### a) Principe d'un arbre pondéré



Soit  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers  $\Omega$  tels que  $P(B) \neq 0$ .

Chaque branche de l'arbre est affectée d'une probabilité, on dit que l'arbre est pondéré.

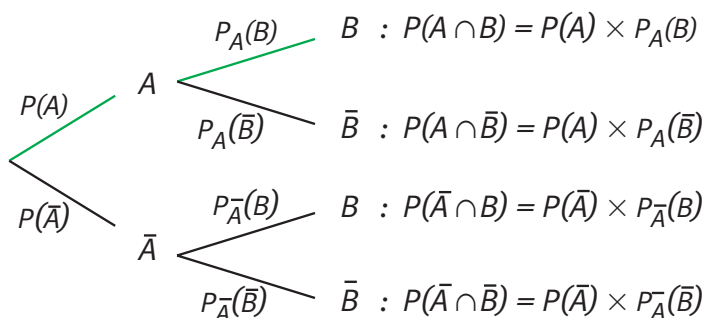
Les branches de gauche sont affectées des probabilités des événements correspondants.

Les nombres inscrits sur les branches de droite, partant de l'événement conditionnant  $B$  (ou de son contraire  $\bar{B}$ ) sont des probabilités conditionnelles. Par exemple le nombre inscrit sur la branche

$A \longrightarrow B$  est  $P_A(B)$ .

Un tel arbre rend très aisé le calcul de la probabilité d'une intersection à l'aide d'une probabilité conditionnelle. L'intersection  $A \cap B$  est représentée par le chemin indiqué en couleur et traits épais.

La probabilité de  $A \cap B$  est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin correspondant car  $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$ .



## b) Savoir construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée

► Exemple 3 On complète l'énoncé de l'exemple 2 par l'information que 30% des garçons ont choisi le basket.

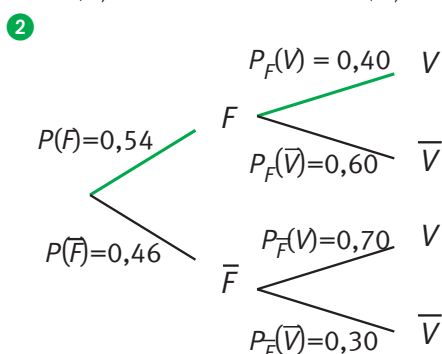
- 1 Indiquer sur un arbre pondéré les probabilités données par l'énoncé.
- 2 Compléter l'arbre.

► **Solution** 1 L'événement « l'élève est un garçon » pourrait être noté  $G$ , on a préféré le noter  $F$  puisque c'est l'événement contraire de  $\bar{F}$ , de même on a noté  $V$  l'événement « l'élève pratique le basket ».

Les probabilités qui sont données sont indiquées en couleur.

Les autres probabilités sont calculées en utilisant les complémentaires :

$$P(\bar{F}) = 1 - P(F) = 0,46, \quad P_F(\bar{V}) = 1 - P_F(V) = 0,60 \text{ et } P_{\bar{F}}(V) = 1 - P_{\bar{F}}(\bar{V}) = 0,70.$$



### À savoir

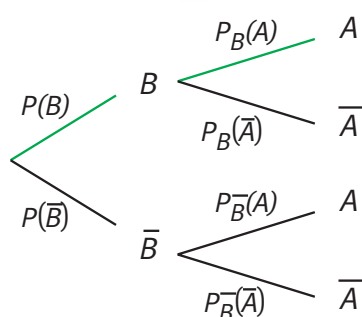
#### Règles de construction d'un arbre pondéré

- On indique sur chaque branche la probabilité correspondante.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même événement (on dit aussi « d'un même nœud ») est égale à 1. Cette règle est parfois appelée « la loi des nœuds ». Elle est une conséquence de la propriété 2 :

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B).$$

#### Remarque

Un autre arbre est possible, en permutant les rôles de  $A$  et  $B$  : voir ci-contre.



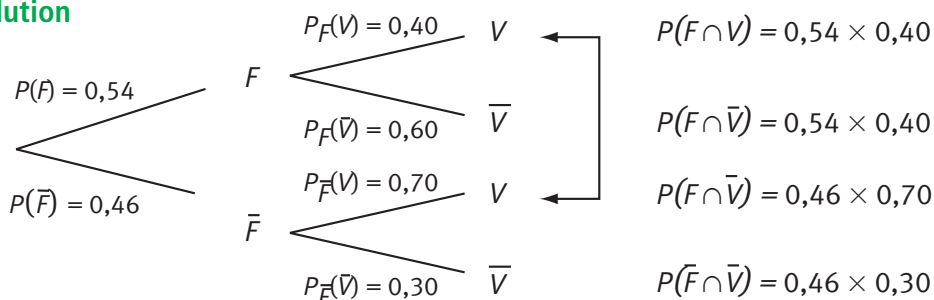
C'est la lecture attentive de l'énoncé qui fait choisir l'arbre adapté à l'exercice. D'ailleurs, si on fait le mauvais choix, on n'arrive pas à avancer et il faut penser à faire l'autre arbre.

## c) Savoir exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités

► Exemple 4 On reprend la situation des exemples 2 et 3.

Quelle est la probabilité de rencontrer par hasard un(e) élève qui pratique le volley-ball ?

► Solution



Deux chemins de l'arbre aboutissent à  $V$ , ils correspondent aux événements incompatibles  $F \cap V$  et  $\bar{F} \cap V$  dont la réunion est l'événement  $V$ .

Comme on l'a vu dans les pré-requis  $P(V) = P(V \cap F) + P(V \cap \bar{F})$ , donc

$$\begin{aligned} P(V) &= P(F) \times P_F(V) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(V) \\ &= 0,54 \times 0,40 + 0,46 \times 0,70 \\ &= 0,538. \end{aligned}$$

Cet exemple est l'illustration de la méthode générale.

### À savoir

#### Règles d'utilisation d'un arbre pondéré

- On obtient la probabilité d'une intersection en multipliant les probabilités des branches du chemin correspondant.
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

#### Remarque

Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve même le jour de l'examen.

#### Quelques conseils

Lire attentivement un énoncé pour distinguer la donnée d'une probabilité « classique » du type  $P(A)$  de celle d'une probabilité conditionnelle.

Bien présenter l'arbre pondéré car on s'en sert dans tout l'exercice en général et savoir dire à quelle probabilité correspondent les nombres écrits sur les branches.

Lire attentivement les consignes car il faut savoir interpréter la question en termes de probabilité : demande-t-on une probabilité du type  $P(A)$ , une probabilité d'intersection d'événements ou une probabilité conditionnelle ?



## d) Un exemple avec des boules

- Exemple 5 Une urne contient trois boules blanches et cinq noires, indiscernables au toucher. On tire au hasard une première boule de l'urne. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute une autre boule blanche. Si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

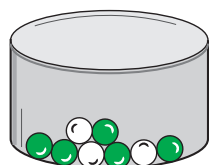
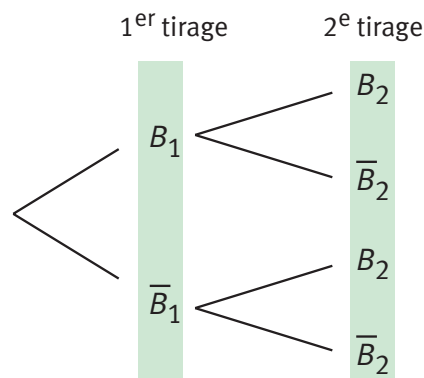
On tire ensuite, au hasard, une seconde boule de l'urne.

Soient  $B_1$  l'événement : « la première boule extraite est blanche » et  $B_2$  l'événement : « la seconde boule extraite est blanche ».

- 1 Construire l'arbre pondéré associé à cette situation.
- 2 Déterminer la probabilité que les deux boules extraites soient blanches.
- 3 Déterminer la probabilité que la deuxième boule soit noire.

Faire apparaître sur l'arbre le(s) chemin(s) correspondant(s).

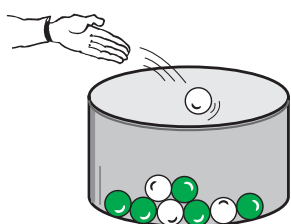
- **Solution** 1 Les résultats du premier tirage influent sur ceux du 2<sup>e</sup> tirage, on peut penser à l'arbre suivant ( $\bar{B}_1$  désigne l'événement : « la première boule tirée n'est pas blanche, c'est-à-dire est noire »).



• **Premier tirage** : calcul de  $P(B_1)$  et  $P(\bar{B}_1)$ .

Les boules étant indiscernables au toucher et choisies au hasard, on utilise la loi équirépartie.

On a alors  $P(B_1) = \frac{3}{8}$  et  $P(\bar{B}_1) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ .

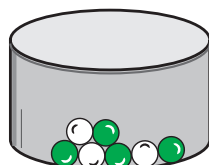


• **Second tirage**

Premier cas : supposons que la première boule tirée est blanche, c'est-à-dire supposons que  $B_1$  est réalisé.

On remet donc la boule tirée dans l'urne et on ajoute une boule blanche : il y a maintenant 4 boules blanches et 5 boules noires.

D'où  $P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{9}$  et  $P_{B_1}(\bar{B}_2) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ .

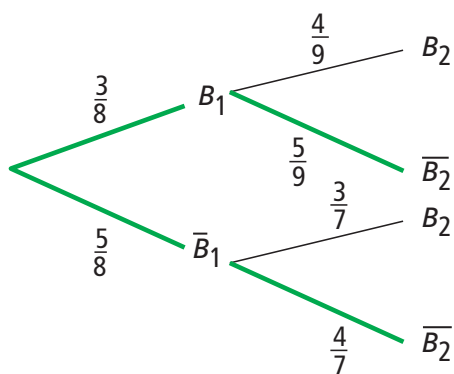


Deuxième cas : supposons que la première boule tirée est noire, c'est-à-dire supposons que  $\bar{B}_1$  est réalisé.

On ne remet pas la boule tirée dans l'urne qui contient donc 3 boules blanches et 4 boules noires.

D'où  $P_{\bar{B}_1}(B_2) = \frac{3}{7}$  et  $P_{\bar{B}_1}(\bar{B}_2) = \frac{4}{7}$ .

On en déduit l'arbre pondéré :



2 On cherche  $P(B_1 \cap B_2)$ .

On sait que  $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{6}$  : il suffit de multiplier les probabilités du chemin correspondant.

3 L'événement « la deuxième boule tirée est noire », c'est-à-dire  $\overline{B_2}$ , correspond aux deux chemins mis en couleur sur l'arbre ci-dessus. L'événement  $\overline{B_2}$  est donc l'union des deux événements disjoints  $B_1 \cap \overline{B_2}$  et  $\overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ .

$$P(\overline{B_2}) = P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(B_1) \times P_{B_1}(\overline{B_2}) + P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}).$$

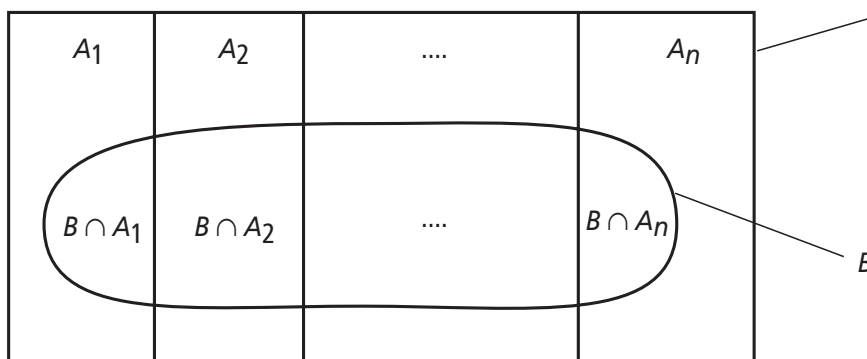
$$\text{D'où } P(\overline{B_2}) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{95}{168}.$$

La probabilité que la deuxième boule soit noire est donc égale à  $\frac{95}{168}$ .

## 4. Formule des probabilités totales

### Définition 2

On dit que les  $n$  événements  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  d'un univers  $\Omega$  forment une **partition** de  $\Omega$  lorsque les événements  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  sont incompatibles deux à deux et lorsque leur réunion est égale à  $\Omega$ .



**Propriété 3** *formule des probabilités totales.*

On suppose que les événements  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  forment une partition de l'univers et que chacun d'eux a une probabilité non nulle.

Soit un événement  $B$  alors

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

■ **Démonstration**

Les événements  $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$  sont incompatibles (disjoints) deux à deux et  $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$ .

Donc  $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$

Soit  $P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$ .

**Remarque**

Ceci généralise ce qu'on a vu pour un événement et son contraire car un événement et son contraire forment une partition de l'univers.

■ **Conséquence**

Les règles de construction et d'utilisation d'un arbre pondéré pour plus de deux événements sont les mêmes que pour deux.

► **Exemple 6**

Pour produire des pièces métalliques, un atelier utilise trois machines. Toutes les pièces sont vérifiées par le service qualité. Ce service a fourni le tableau suivant après une journée de production.

Machine utilisée	N°1	N°2	N°3
Pièces produites (en pourcentage du total)	50	35	15
Fréquence des défauts (par machine)	0,01	0,02	0,06

On prend au hasard une pièce produite dans la journée.

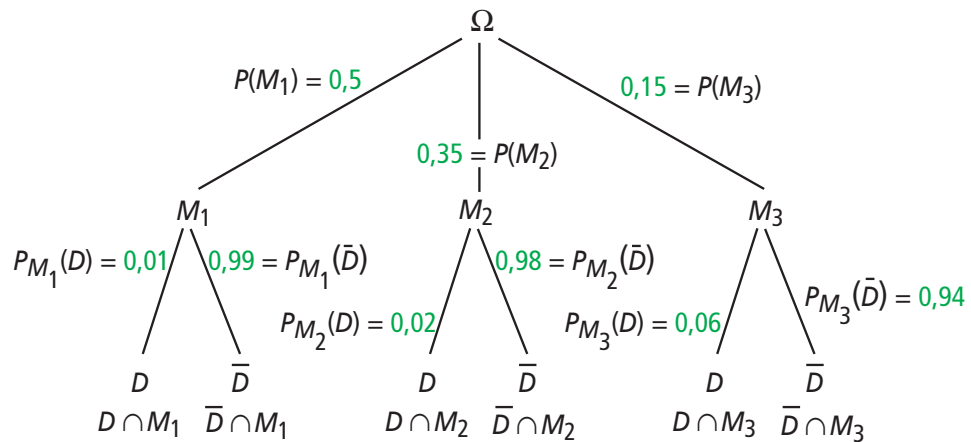
Déterminer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

► **Solution**

On modélise la situation en utilisant la loi équirépartie et on fait un arbre pondéré.

On note  $D$  l'événement « la pièce est défectueuse », on note  $M_1$  l'événement la pièce est fabriquée par la machine N°1 et de même pour les autres machines.

(Pour des raisons de place on a choisi de dessiner l'arbre vers le bas.)



Il s'agit de calculer  $P(D)$ .

Les événements  $M_1, M_2$  et  $M_3$  sont disjoints et leur réunion forme l'univers, ils forment donc une partition de  $\Omega$  et on peut appliquer la formule des probabilités totales.

$$P(D) = P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3)$$

$$P(D) = P(M_1) \times P_{M_1}(D) + P(M_2) \times P_{M_2}(D) + P(M_3) \times P_{M_3}(D)$$

$$P(D) = 0,5 \times 0,01 + 0,35 \times 0,02 + 0,15 \times 0,06.$$

On a donc  $P(D) = 0,0212$ .

## 5. Exemples d'application

### a) Tests

- Exemple 7 Une grave maladie affecte le cheptel bovin d'un pays. On estime que 7 % des bovins sont atteints. On vient de mettre au point un test pour diagnostiquer cette maladie.

Quand un animal est malade, le test est positif dans 87 % des cas.

Quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas.

Un animal choisi au hasard passe le test.

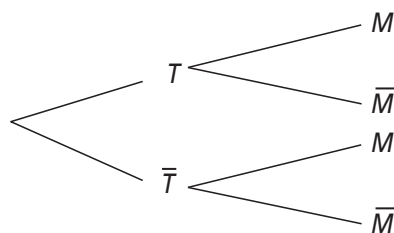
On note  $M$  l'événement « l'animal est malade » et  $T$  l'événement « le test est positif ».

- 1 Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilités. Proposer alors un arbre adapté à l'exercice puis le compléter.
- 2 En déduire, par lecture de l'arbre :  $P(M \cap T)$ ,  $P(M \cap \bar{T})$ ,  $P(\bar{M} \cap T)$  et  $P(\bar{M} \cap \bar{T})$ .
- 3 Déterminer la probabilité que l'animal ait un test positif.

Dans les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis à  $10^{-4}$  près

- 4 Quelle est la probabilité qu'un animal ayant un test positif soit malade ?

5 Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :

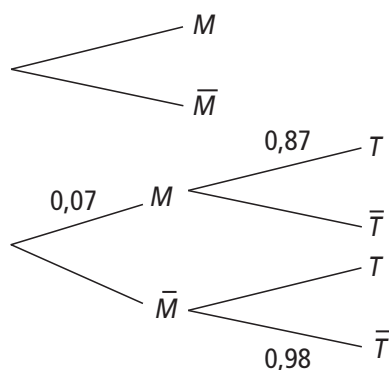


► **Solution** 1 • 7 % des bovins sont atteints donc  $P(M) = 0,07$ .

• Quand un animal est malade (« sachant que l'animal est malade »), le test est positif dans 87 % des cas se traduit par :  $P_M(T) = 0,87$ .

• Quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas donne :  $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,98$ .

Connaissant  $P_M(T)$  et  $P_{\bar{M}}(\bar{T})$ , l'arbre adapté ici est celui commençant par la ramification :

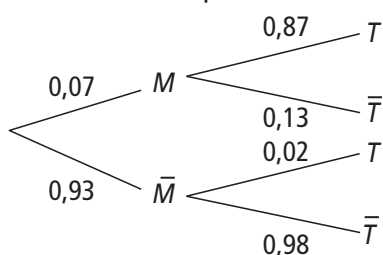


On pense donc à utiliser l'arbre :

Avec

$$P(\bar{M}) = 1 - P(M) = 0,93 ; P_M(\bar{T}) = 1 - P_M(T) = 0,13 \text{ et } P_{\bar{M}}(T) = 1 - P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,02.$$

D'où l'arbre complet :



2 D'après l'arbre pondéré précédent, on a :

$$P(M \cap T) = 0,07 \times 0,87 = 0,0609.$$

$$P(M \cap \bar{T}) = 0,07 \times 0,13 = 0,0091.$$

$$P(\bar{M} \cap T) = 0,93 \times 0,02 = 0,0186.$$

$$P(\bar{M} \cap \bar{T}) = 0,93 \times 0,98 = 0,9114.$$

3 On cherche ici  $P(T)$ .

D'après la formule des probabilités totales où on utilise  $M$  et  $\bar{M}$ , on a :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0,0609 + 0,0186 = 0,0795.$$

- ④ Il faut comprendre qu'on nous demande ici  $P_T(M)$ .

On pense à utiliser la formule :

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,0609}{0,0795} = 0,7660 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

**Remarque** L'énoncé a donné  $P_M(T)$  et c'est bien la probabilité  $P_T(M)$ , la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif, qui est intéressante dans la pratique.

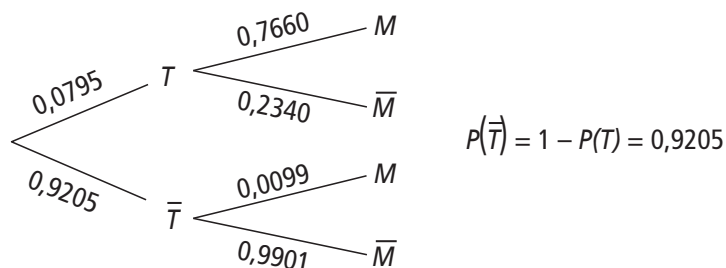
- ⑤ Pour compléter l'arbre inversé demandé, on calcule de même  $P_T(\bar{M})$ ,  $P_{\bar{T}}(M)$

et  $P_{\bar{T}}(\bar{M})$  :  $P_T(\bar{M}) = \frac{P(T \cap \bar{M})}{P(T)} = \frac{0,0186}{0,0795} = 0,23404 \text{ à } 10^{-4} \text{ près (ou calculer : } 1 - P_T(M)\text{)}.$

$$P_{\bar{T}}(M) = \frac{P(M \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,0091}{1 - 0,0795} = 0,0099 \text{ à } 10^{-4} \text{ près et}$$

$$P_{\bar{T}}(\bar{M}) = \frac{P(\bar{M} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,9114}{1 - 0,0795} = 0,9901 \text{ à } 10^{-4} \text{ près (ou calculer : } 1 - P_{\bar{T}}(M)\text{)}.$$

Ces calculs nous permettent de dresser l'arbre pondéré suivant :



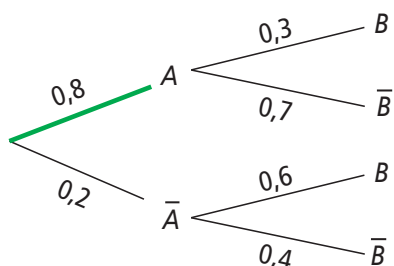
**Remarque** Une étude plus approfondie des probabilités liées aux tests médicaux est proposée dans l'exercice II du chapitre 5.

# D

## Exercices d'apprentissage

### Exercice 1 Q.C.M

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilités ci-dessous :



Une seule réponse est bonne dans les propositions ci-dessous :

- ❶  $P(B)$  est égal à a) 0,6 b) 0,36 c) 0,3
- ❷  $P(\bar{A} \cap B)$  est égale à : a) 0,6 b) 0,8 c) 0,12
- ❸  $P_A(B)$  est égal à : a) 0,3 b) 0,24 c) 0,6

### Exercice 2

- ❶  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$  et  $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ . Calculer  $P_A(B)$  et  $P_B(A)$ .
- ❷  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$  et  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ . Calculer  $P(A \cap B)$ ,  $P_A(B)$  et  $P_B(A)$ .

### Exercice 3

Dans un groupe de 80 personnes, un quart a les yeux bleus et 50 % sont fumeurs. De plus 4 personnes sont fumeurs et ont les yeux bleus.

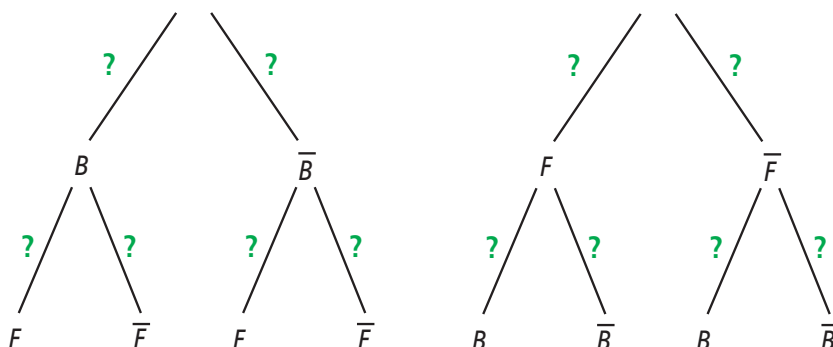
On choisit au hasard un individu dans cette population.

On modélise la situation par une loi équirépartie, et on considère les événements :

$B$  : « l'individu choisi a les yeux bleus ».

$F$  : « l'individu choisi est fumeur ».

Compléter les arbres probabilistes ci-dessous.



**Exercice 4** Dans une usine, la fabrication d'une pièce nécessite son passage par deux machines. Notons  $M_1$  l'événement « la première machine tombe en panne » et  $M_2$  l'événement « la seconde machine tombe en panne ».

Une étude donne les informations suivantes :

- $P(M_1) = 0,004$  et  $P(M_2) = 0,006$  ;
  - Lorsque la première machine est en panne, la probabilité que la seconde machine tombe en panne est 0,5.
- 1 Interpréter la dernière information.
  - 2 Sur un arbre pondéré correspondant à la situation, indiquer toutes les informations fournies par l'énoncé.
  - 1 Calculer  $P_{M_2}(M_1)$ .

**Exercice 5** Dans une entreprise qui fabrique des pièces, on relève 3 % de pièces défectueuses par lot.

Un contrôle des pièces est effectué de telle sorte que :

- 98 % des pièces bonnes sont acceptées.
- 97 % des pièces défectueuses sont refusées.

On prend au hasard une pièce d'un lot et on la contrôle.

- 1 Traduire les données en termes de probabilités. Puis dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.
- 2 Déterminer la probabilité qu'une pièce soit bonne mais refusée.
- 3 Déterminer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
- 4 Déterminer la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise.

**Exercice 6** Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à  $\frac{1}{3}$ . Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est  $\frac{4}{5}$ . On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout entier naturel  $n$  strictement positif, on considère les événements suivants :

$A_n$  : « Alice atteint la cible au nième coup ».

$B_n$  : « Alice rate la cible au nième coup ».

On pose  $P_n = P(A_n)$ .

- 1 Déterminer  $P_1$  et montrer que  $P_2 = \frac{4}{15}$ .
- 2 Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 2$ ,  $P_n = \frac{2}{15}P_{n-1} + \frac{1}{5}$ .



3 Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = P_n - \frac{3}{13}$ .

Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme  $u_1$  et la raison  $q$ .

4 Écrire  $u_n$  puis  $P_n$  en fonction de  $n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$ .

**Exercice 7** Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires : A, B, C, D.

La probabilité qu'il a de choisir A (resp. B, C) est  $\frac{1}{3}$  (resp.  $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}$ )

La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B, C) est  $\frac{1}{20}$  (resp.  $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}$ ).  
En empruntant D, il n'est jamais en retard.

- 1 Quelle est la probabilité que l'élève choisisse l'itinéraire D ?
- 2 L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

**Exercice 8** Un laboratoire a mis au point un alcootest.

Les essais effectués ont conduit aux résultats suivants :

- quand une personne est en état d'ébriété, 96 fois sur 100 l'alcootest se révèle positif,
  - quand une personne n'est pas en état d'ébriété, 1 fois sur 100 l'alcootest se révèle positif.
- 1 On suppose que, dans une région donnée, 2% des conducteurs conduisent en état d'ébriété.

Calculer la probabilité pour qu'une personne de cette région dont l'alcootest est positif ne soit pas en état d'ébriété. Que peut-on penser du résultat obtenu ?

- 2 Les contrôles ayant lieu après le réveillon, on suppose que 5% des conducteurs conduisent en état d'ébriété.

Calculer la probabilité  $P_T(\bar{E})$ , la probabilité des « faux positifs ».

Calculer la probabilité  $P_T(E)$ , la probabilité des « faux négatifs ».

Comparer avec les résultats de la question 1.

**Exercice 9** Reprendre l'activité 2 en utilisant dans l'algorithme le tri d'une liste et une seule boucle. Faire fonctionner cet algorithme sur une calculatrice.

# 3

# Indépendance

## A

### Objectifs

On définit ici l'indépendance de deux événements.

On replace ce qui a été vu en première S pour la répétition d'événements identiques et indépendants dans ce cadre théorique plus général.

## B

### Pour débiter

#### ■ Activité 3

Une enquête sur les salaires dans une entreprise a donné les effectifs suivants :

	Salaires $\leq 1750\text{€}$	Salaires $> 1750\text{€}$	Total par sexe
Femmes	600	200	800
Hommes	900	300	1200
Total par salaire	1500	500	Total : 2000

Parmi les employés de l'entreprise on en choisit un au hasard.

Soit  $A$  l'événement « l'employé touche un salaire inférieur à 1750 € » et  $F$  l'événement « l'employé est une femme ».

Calculer et comparer  $P(A)$ ,  $P_{\bar{F}}(A)$  et  $P_{\bar{F}}(A)$ ; faire de même avec  $P(F)$ ,  $P_A(F)$  et  $P_{\bar{A}}(F)$ .

Que remarque-t-on ? Que peut-on dire de la répartition des salaires dans l'entreprise ?

## C

### Cours

#### 1. Définition

- Idée On dit que deux événements sont indépendants quand la réalisation de l'un ne dépend pas de celle de l'autre. La propriété suivante prouve que les deux événements jouent des rôles symétriques. Ce qui permet ensuite de donner la définition.

#### Propriété 4

Soit deux événements  $A$  et  $B$  tels que  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ .

$$P_B(A) = P(A) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B).$$

#### ■ Démonstration

$$\begin{aligned} P_B(A) = P(A) &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \\ &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \\ &\Leftrightarrow P_A(B) = P(B). \end{aligned}$$

#### Définition 3

Soit deux événements  $A$  et  $B$  tels que  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ .

On dit que les événements  $A$  et  $B$  sont **indépendants** quand  $P_B(A) = P(A)$ .

#### Propriété 5

Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

#### ■ Démonstration

Cette équivalence apparaît dans la démonstration de la propriété 4.

**Remarque** Cette égalité concernant la probabilité de l'intersection peut aussi être prise comme définition de l'indépendance de deux événements.

## 2. Exemples

- Exemple 8 On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.  
On considère les événements  $A$  : « tirer un cœur » et  $B$  : « tirer un roi ».  
Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

► **Solution** On calcule  $P(A)$  et  $P_B(A)$ .

On est en situation d'équiprobabilité et l'univers  $\Omega$  est l'ensemble des 32 cartes, d'où :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad (\text{il y a 8 cœurs}).$$

$$P_B(A) = \frac{1}{4} \quad \text{car c'est la probabilité de tirer un cœur sachant que c'est un roi, or il y a un seul cœur parmi les 4 rois.}$$

On a donc  $P(A) = P_B(A)$ , les événements  $A$  et  $B$  sont donc indépendants.

### Autre méthode

On peut aussi calculer  $P(A)$ ,  $P(B)$  et  $P(A \cap B)$ .

On a  $P(A) = \frac{1}{4}$ , et  $A \cap B$  est l'événement « tirer le roi de cœur » d'où  $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ .

Comme  $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$ , on a  $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ , les événements  $A$  et  $B$  sont donc indépendants.

► Exemple 9 Dans l'exemple de l'activité 3, les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

► **Solution** On a montré que  $P_B(A) = P(A)$  donc les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.

► Exemple 10 Dans l'exemple de l'activité 1 du chapitre 2, les événements  $T$  et  $J$  sont-ils indépendants ?

► **Solution** Comme  $P(T) = 0,6$  et  $P(J) = 0,55$ , on a  $P(T) \times P(J) = 0,6 \times 0,55 = 0,33$ .

Or  $P(T \cap J) = 0,35$  donc  $P(T) \times P(J) \neq P(T \cap J)$ , les événements  $T$  et  $J$  ne sont pas indépendants.

► Exemple 11 Dans l'exemple 4 du chapitre 2, les événements  $F$  et  $V$  sont-ils indépendants ?

► **Solution** On a trouvé  $P(V) = 0,538$  et on sait que  $P_F(V) = 0,40$ , donc les événements  $F$  et  $V$  ne sont pas indépendants.

**Remarque** Dans les exemples et les énoncés d'exercice, la notion d'indépendance peut intervenir sous deux aspects : soit on prouve que deux événements sont indépendants comme dans l'exemple 8 du roi de cœur, soit l'indépendance est donnée dans l'énoncé.

### Cas particulier de la répétition d'expériences identiques

Les conditions de certaines expériences (lancers successifs d'un dé, d'une pièce, tirages de boules avec remise...) créent des événements indépendants au sens courant : le dé ou la pièce n'a pas de mémoire...

Avec des simulations ou des arbres permettant de compter toutes les issues, on a modélisé ces expériences en première S et on a choisi une loi de probabilité adaptée. Cette loi consiste justement à calculer la probabilité d'une liste de  $n$  résultats issus de la répétition d'expériences identiques en faisant le produit des probabilités de chacun des  $n$  résultats partiels qui constituent cette liste.

Cette loi rend donc les événements de chaque expérience indépendants des autres résultats au sens probabiliste et on a choisi de dire qu'il s'agit d'expériences **identiques et indépendantes**.

Dans ces répétitions, le mot indépendant au sens courant correspond maintenant au mot indépendant au sens probabiliste.

Les résultats concernant la loi binomiale ont été rappelés dans les pré-requis, ils doivent être connus.

Une expérience peut consister en la **succession d'expériences non identiques et indépendantes** (au sens courant) : on lance une pièce et un dé, on lance trois dés de formes différentes (exercice 13). On choisit alors une loi de probabilité analogue et, comme ci-dessus, cette loi rend les résultats partiels de chaque expérience indépendants des autres résultats au sens probabiliste

### 3. Propriétés

#### Propriété 6

Si deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors il en est de même pour les événements  $A$  et  $\bar{B}$ .

#### ■ Démonstration

On a :  $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$  (d'après la propriété 2 du chapitre 2).

Or  $P_A(B) = P(B)$  puisque  $A$  et  $B$  sont indépendants, d'où  $P_A(\bar{B}) = 1 - P(B) = P(\bar{B})$ .

Les événements  $A$  et  $\bar{B}$  sont donc indépendants.

#### À savoir

**Si deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors**

- $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants,
- $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants,
- $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

#### Remarque

Deux événements  $A$  et  $B$  incompatibles et de probabilités non nulles ne sont pas indépendants.

#### ■ Démonstration

On a :  $P(A) \times P(B) \neq 0$  et  $P(A \cap B) = 0$  car  $A \cap B = \emptyset$ .

Donc  $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ , les événements ne sont donc pas indépendants.

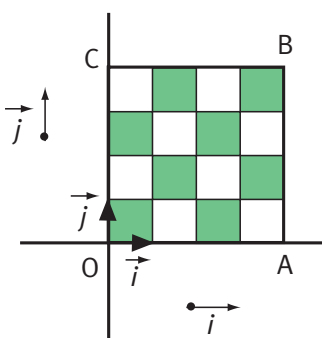


Il ne faut pas confondre les notions d'indépendance et d'incompatibilité qui interviennent dans des situations tout à fait différentes : l'incompatibilité de deux événements est utilisée lorsqu'on calcule la probabilité d'une union d'événements alors que c'est dans le calcul de la probabilité d'une intersection que l'indépendance peut apparaître.

	Union	Intersection
<b>Cas général</b>	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
<b>Cas particulier</b>	Si les événements $A$ et $B$ sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Si les événements $A$ et $B$ sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Pour encore mieux comprendre la différence entre ces deux notions, on peut imaginer une discussion entre deux personnes  $A$  et  $B$  où  $B$  dit systématiquement le contraire de  $A$ . Les positions de  $A$  et de  $B$  sont bien sûr incompatibles, mais elles ne sont pas du tout indépendantes, elles sont même complètement dépendantes.

## 4. Un exemple de simulation : une marche aléatoire



Une puce se déplace sur les arêtes d'un damier de  $4 \times 4$  cases. On repère cet échiquier comme indiqué ci-dessous. La puce part du sommet  $(0 ; 0)$  et à chaque étape, elle se déplace selon la translation de vecteur  $\vec{i}(1 ; 0)$  ou la translation de vecteur  $\vec{j}(0 ; 1)$ .

Autrement dit, à chaque saut, c'est soit l'abscisse, soit l'ordonnée de la puce qui augmente de 1. La puce ne peut, de plus, pas sortir du damier.

On suppose qu'à chaque saut, les 2 déplacements sont équiprobables et que la puce continue de se déplacer jusqu'à ce qu'elle atteigne le bord  $[AB]$  ou le bord  $[BC]$  du damier.

### Partie I Modélisation

On note  $X$  l'abscisse de la puce et  $Y$  son ordonnée.

- 1 Quelles conditions doivent vérifier  $X$  et  $Y$  pour que la puce effectue un nouveau saut ?
- 2 À l'aide du logiciel Algobox et d'une boucle *Tant que*, écrire un programme simulant cette expérience aléatoire et affichant le nombre de déplacements effectués par la puce.
- 3 Améliorer le programme précédent en utilisant les fonctions de dessin de telle sorte que le logiciel affiche le chemin parcouru par la puce.

## Partie II *Partie théorique*

On note  $D$  le nombre de déplacements de la puce.

- 1 Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire  $D$ .
- 2 Déterminer  $P(D = 4)$ .
- 3 Déterminer la probabilité que la puce passe par le point de coordonnées :  
a) (3 ; 0)   b) (2 ; 1)   c) (1 ; 2)   d) (0 ; 3) (on pourra s'aider d'un arbre).
- 4 a) Déterminer la loi de probabilité de  $D$ .  
b) En déduire  $E(D)$ .

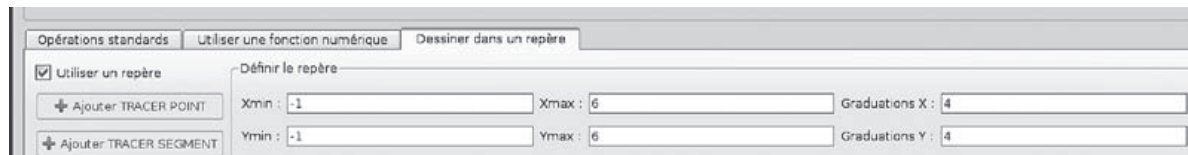
### ► Solution Partie I

#### *Modélisation*

- 1 La puce continue d'avancer tant que :  $(X < 4)$  et  $(Y < 4)$ .
- 2 On peut implémenter l'algorithme suivant.

```
VARIABLES
- X EST_DU_TYPE NOMBRE
- Y EST_DU_TYPE NOMBRE
- Nombre_de_déplacements EST_DU_TYPE NOMBRE
- alea EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
- X PREND_LA_VALEUR 0
- Y PREND_LA_VALEUR 0
- Nombre_de_déplacements PREND_LA_VALEUR 0
- TANT_QUE (X<4 ET Y<4) FAIRE
  - DEBUT_TANT_QUE
  - alea PREND_LA_VALEUR random()
  - SI (alea<0.5) ALORS
    - DEBUT_SI
    - X PREND_LA_VALEUR X+1
    - FIN_SI
  - SINON
    - DEBUT_SINON
    - Y PREND_LA_VALEUR Y+1
    - FIN_SINON
  - Nombre_de_déplacements PREND_LA_VALEUR Nombre_de_déplacements+1
  - FIN_TANT_QUE
AFFICHER Nombre_de_déplacements
FIN_ALGORITHME
```

- 3 On peut cliquer sur l'onglet « Dessiner dans un repère ».

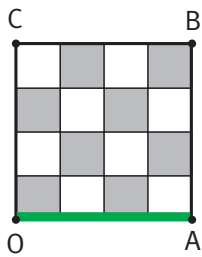


On peut alors implémenter le programme suivant.

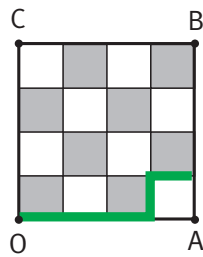
```
VARIABLES
- X EST_DU_TYPE NOMBRE
- Y EST_DU_TYPE NOMBRE
- Nombre_de_déplacements EST_DU_TYPE NOMBRE
- alea EST_DU_TYPE NOMBRE
- X2 EST_DU_TYPE NOMBRE
- Y2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
- X PREND_LA_VALEUR 0
- Y PREND_LA_VALEUR 0
- Nombre_de_déplacements PREND_LA_VALEUR 0
- TANT_QUE (X<4 ET Y<4) FAIRE
  - DEBUT_TANT_QUE
  - alea PREND_LA_VALEUR random()
  - SI (alea<0.5) ALORS
    - DEBUT_SI
    - X2 PREND_LA_VALEUR X+1
    - Y2 PREND_LA_VALEUR Y
    - FIN_SI
  - SINON
    - DEBUT_SINON
    - X2 PREND_LA_VALEUR X
    - Y2 PREND_LA_VALEUR Y+1
    - FIN_SINON
  - TRACER_SEGMENTS (X,Y)->(X2,Y2)
  - Nombre_de_déplacements PREND_LA_VALEUR Nombre_de_déplacements+1
  - X PREND_LA_VALEUR X2
  - Y PREND_LA_VALEUR Y2
  - FIN_TANT_QUE
AFFICHER Nombre_de_déplacements
```

## Partie II *Partie théorique*

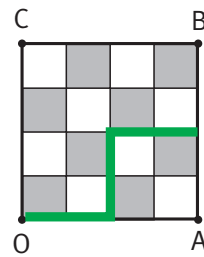
- 1 Les valeurs pouvant être prises par  $D$  sont 4, 5, 6 et 7, comme le montrent les exemples suivants.



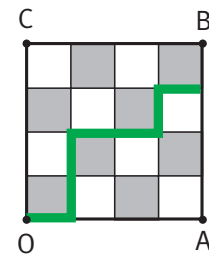
$(0;0) \rightarrow (1;0)$   
 $\rightarrow (2;0) \rightarrow (3;0)$   
 $\rightarrow (4;0)$



$(0;0) \rightarrow (1;0)$   
 $\rightarrow (2;0) \rightarrow (3;0)$   
 $\rightarrow (3;1) \rightarrow (4;1)$



$(0;0) \rightarrow (1;0)$   
 $\rightarrow (2;0) \rightarrow (2;1)$   
 $\rightarrow (2;2) \rightarrow (3;2)$   
 $\rightarrow (4;2)$



$(0;0) \rightarrow (1;0)$   
 $\rightarrow (1;1) \rightarrow (1;2)$   
 $\rightarrow (2;2) \rightarrow (3;2)$   
 $\rightarrow (3;3) \rightarrow (4;3)$

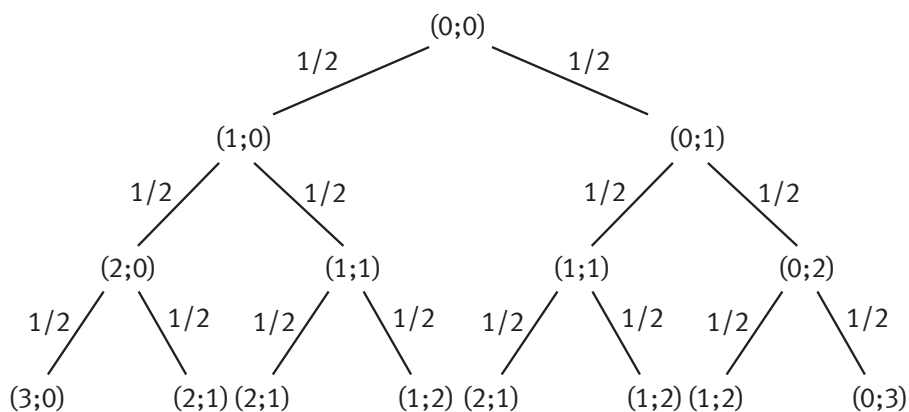
- 2 Il n'y a que deux chemins qui nous mène sur  $[AB]$  ou  $[BC]$  en 4 étapes, c'est le chemin  $(0;0) \rightarrow (1;0) \rightarrow (2;0) \rightarrow (3;0) \rightarrow (4;0)$  et  $(0;0) \rightarrow (0;1) \rightarrow (0;2) \rightarrow (0;3) \rightarrow (0;4)$ . On nomme, respectivement, chemin H et chemin V ces chemins.

Les sauts de la puce sont indépendants les uns des autres, la probabilité d'une liste de résultats est donc le produit des probabilités. Pour chaque saut, les directions étant équiprobables, la probabilité que la puce suive le chemin H est :  $p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ . La probabilité que la puce suive le chemin

V est aussi  $p$ . Ainsi, les événements « la puce emprunte le chemin H » et « la puce emprunte le chemin V » étant incompatibles, on a :

$$P(D=4) = p + p = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

- 3 L'ébauche d'arbre suivant nous permet de répondre à cette question.





Par lecture de l'arbre, la probabilité que la puce passe par le point de coordonnées

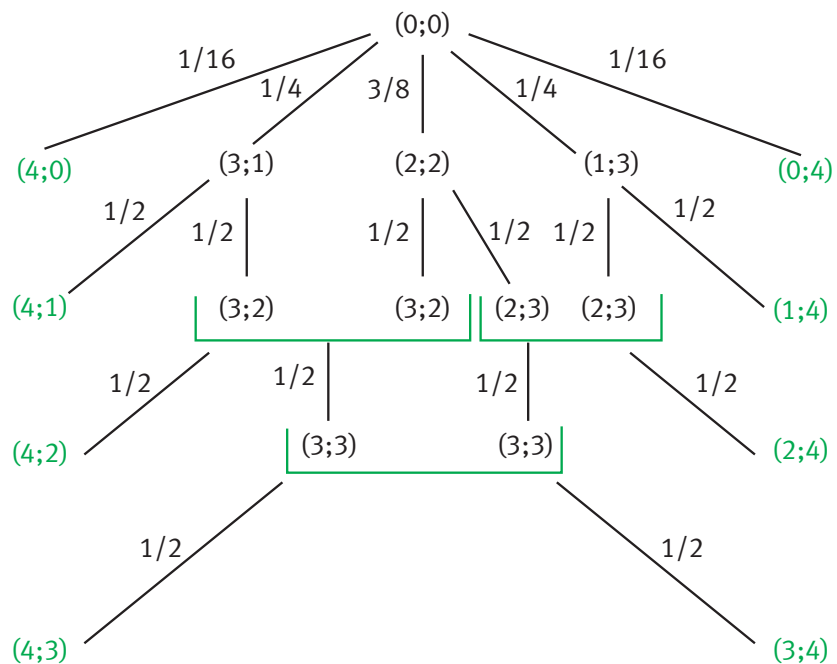
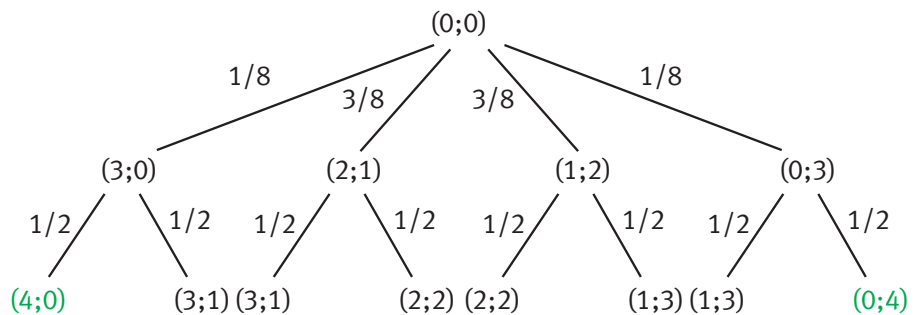
a)  $(3 ; 0)$  est  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ ;

b)  $(2 ; 1)$  est  $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times 3 = \frac{3}{8}$ ;

c)  $(1 ; 2)$  est  $\frac{3}{8}$  et

d)  $(0 ; 3)$  est  $\frac{1}{8}$ .

4 Les arbres pondérés suivant nous permettent de répondre à cette question.



L'événement  $(D = 5)$  est l'union des événements incompatibles « la puce passe par le point de coordonnées  $(4 ; 1)$  » et « la puce passe par le point de coordonnées  $(1 ; 4)$  ». On a donc :  $P(D = 5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

L'événement  $(D = 6)$  est l'union des événements incompatibles « la puce passe par le point de coordonnées  $(4 ; 2)$  » et « la puce passe par le point de coordonnées  $(2 ; 4)$  ». La probabilité que la puce passe par le point de coordonnées  $(3 ; 2)$  est  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$ . Ainsi la probabilité que la puce passe par le point de coordonnée  $(4 ; 2)$  est  $\frac{5}{16} \times \frac{1}{2}$ . On a donc :  $P(D = 6) = \frac{5}{16} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$ .

La probabilité  $P(D = 7)$  est la probabilité que la puce passe par le point de coordonnées  $(3 ; 3)$ . On a donc :  $P(D = 7) = \frac{5}{16}$ .

Le tableau suivant résume ce qui précède et nous donne la loi de probabilité de  $D$ .

$k$	4	5	6	7
$P(D = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

On a donc :  $E(D) = \frac{1}{8} \times 4 + \frac{1}{4} \times 5 + \frac{5}{16} \times 6 + \frac{5}{16} \times 7 = 5,8125$ .

## D

## Exercices d'apprentissage

### Exercice 10

Dans un univers  $\Omega$  muni d'une loi de probabilité  $P$ , trois événements  $A$ ,  $B$  et  $C$ , sont tels que  $P(A) = 0,3$ ,  $P(B) = 0,5$ ,  $P(C) = 0,4$ ,  $P(A \cup B) = 0,65$ ,  $P(A \cup C) = 0,7$  et  $P(B \cup C) = 0,8$ .

- 1 Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? Sont-ils incompatibles ?
- 2 Les événements  $A$  et  $C$  sont-ils indépendants ? Sont-ils incompatibles ?
- 3 Les événements  $B$  et  $C$  sont-ils indépendants ? Sont-ils incompatibles ?

### Exercice 11

1 Dans un univers  $\Omega$  muni d'une loi de probabilité  $P$ , deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que  $P(A) = 0,2$  et  $P(B) = 0,5$ . On suppose que les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants, calculer alors  $P(A \cap B)$  et  $P(A \cup B)$ .

2 On considère maintenant deux événements incompatibles  $C$  et  $D$  tels que  $P(C) = 0,3$  et  $P(D) = 0,15$ . Calculer alors  $P(C \cap D)$  et  $P(C \cup D)$ .

### Exercice 12

On lance trois dés non truqués : un dé cubique, un dé octaédrique et un dé dodécaédrique.



- 1 Quelle est la probabilité de l'événement  $U$  « obtenir trois fois 1 » ?
- 2 Quelle est la probabilité de l'événement  $Q$  « obtenir trois résultats strictement supérieurs à 4 » ?
- 3 Si l'événement  $U$  est réalisé on gagne 3€, si l'événement  $Q$  est réalisé on perd 1€, sinon on gagne  $n \times 0,01$  €,  $n$  étant un entier. Déterminer la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle le jeu est favorable au joueur.

### Exercice 13 Pour revoir la loi binomiale

Un questionnaire à choix multiples comporte dix questions.

Pour chaque question, il y a trois réponses proposées dont une seule est correcte.

Pour être reçu, il faut au moins huit réponses exactes.

Quelle est la probabilité d'être reçu pour un candidat qui répond au hasard ?

### Exercice 14

- ① On lance une pièce non truquée  $n$  fois de suite,  $n$  est un entier tel que  $n \geq 2$ .
  - a) Soit  $A$  l'événement « on obtient des résultats identiques ». Déterminer  $P(A)$ .
  - b) Soit  $B$  l'événement « on obtient Pile au plus une fois ». Déterminer  $P(B)$ .
- ② Si  $n = 2$  les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? Et si  $n = 3$  ? Commenter ces résultats.

### Exercice 15

Une épreuve consiste à lancer une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées 1, 2, 3.

Deux joueurs Alice et Bob sont en présence.

Pour Alice, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2, 3 sont dans cet ordre :

$$\frac{1}{12}, \frac{1}{3} \text{ et } \frac{7}{12}.$$

Pour Bob, les trois éventualités sont équiprobables.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- ① Alice lance la fléchette trois fois. On admet que les résultats des trois lancers sont indépendants.
  - a) Quelle est la probabilité que la case 3 soit atteinte trois fois ?
  - b) Quelle est la probabilité que les cases 1, 2, 3 soient atteintes dans cet ordre ?
  - c) Quelle est la probabilité que la case 1 soit atteinte exactement une fois ?
- ② On choisit un des deux joueurs. La probabilité de choisir Alice est égale à deux fois la probabilité de choisir Bob.
  - a) Un seul lancer est effectué. Quelle est la probabilité pour que la case 3 soit atteinte ?
  - b) Un seul lancer a été effectué et la case 3 a été atteinte. Quelle est la probabilité pour que ce soit Alice qui ait lancé la fléchette ?

### Exercice 16

On répète  $n$  épreuves identiques ayant deux issues, succès ou échec,  $n$  fixé. On appelle  $X$  le numéro du premier succès et on pose  $X = 0$  s'il n'y a aucun succès. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  et vérifier que

$$\sum_{k=0}^{k=n} P(X = k) = 1. \text{ Cette loi s'appelle la loi géométrique tronquée.}$$

# 4

## Synthèse

### A

### Synthèse de la séquence

#### 1. Conditionnement par un événement de probabilité non nulle

##### Définition

Soient  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers  $\Omega$  tels que  $P(A) \neq 0$ .

On appelle **probabilité de l'événement  $B$  sachant que  $A$  est réalisé** le nombre, noté  $P_A(B)$ , lu «  $P$  de  $B$  sachant  $A$  », défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

##### ► Conséquence

- $P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$  lorsqu'il y a équiprobabilité.
- $P_A(A) = 1$ ,  $0 \leq P_A(B) \leq 1$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont deux événements incompatibles (c'est-à-dire si  $A \cap B = \emptyset$ ), on a  $P(A \cap B) = 0$  donc  $P_A(B) = 0$ .

##### Propriété

##### Intersection de deux événements

Soient  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ .

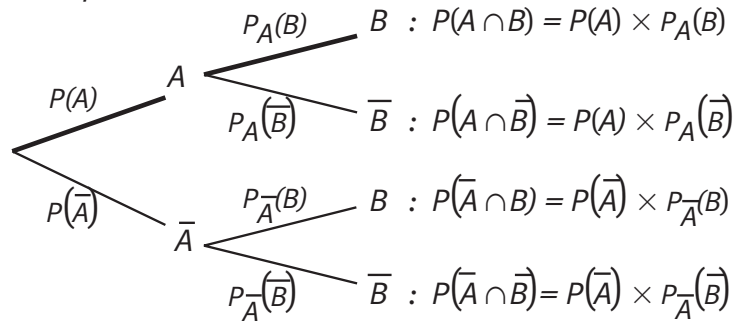
$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \text{ et } P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

##### Propriété

##### Complémentaire d'un événement

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B).$$

### Arbre pondéré



### Règles de construction d'un arbre pondéré

- On indique sur chaque branche la probabilité du chemin correspondant (c'est éventuellement une probabilité conditionnelle).
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même événement (on dit aussi « d'un même noeud ») est égale à 1. Cette règle est parfois appelée « la loi des noeuds ». Elle est une conséquence de la propriété 2 :

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B).$$

### Règles d'utilisation d'un arbre pondéré

- On obtient la probabilité d'une intersection en multipliant les probabilités des branches du chemin correspondant.
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

#### Définition

On dit que les  $n$  événements  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  d'un univers  $\Omega$  forment une **partition** de  $\Omega$  lorsque les événements  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  sont incompatibles deux à deux et lorsque leur réunion est égale à  $\Omega$ .

#### Propriété

On suppose que les événements  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  forment une partition de l'univers et que chacun d'eux a une probabilité non nulle.

Soit un événement  $B$  alors

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

c'est la **formule des probabilités totales**.

## 2. Indépendance

### Définition

Soient  $A$  et  $B$  deux événements d'un univers  $\Omega$  tels que  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ .

On dit que les événements  $A$  et  $B$  sont **indépendants** quand  $P_B(A) = P(A)$ .

### Propriété

Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

### Propriété

Si deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors

- $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants,
- $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants,
- $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

### Cas particulier de la répétition d'expériences identiques

On a choisi une loi de probabilité adaptée. Cette loi consiste à faire le produit des probabilités de chacun des  $n$  résultats partiels qui constituent une liste de  $n$  résultats de la répétition d'expériences identiques.

On dit qu'il s'agit d'expériences **identiques et indépendantes**.

Dans ces répétitions, le mot indépendant au sens courant correspond au mot indépendant au sens probabiliste.



Il ne faut pas confondre les notions d'indépendance et d'incompatibilité qui interviennent dans des situations tout à fait différentes : l'incompatibilité de deux événements est utilisée lorsqu'on calcule la probabilité d'une union d'événements alors que c'est dans le calcul de la probabilité d'une intersection que l'indépendance peut apparaître.

	Union	Intersection
<b>Cas général</b>	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
<b>Cas particulier</b>	Si les événements $A$ et $B$ sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Si les événements $A$ et $B$ sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

# B

## Exercices de synthèse

### Exercice I

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.

Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92% des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- $F$  l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- $S$  l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1 Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

- Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.
- Démontrer que  $P_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{1}{4}$ .
- Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2 Calcul de probabilités.

- Démontrer que  $P(S) = 0,934$ .
- Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième.)

3 Étude d'une variable aléatoire  $B$ .

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.

On désigne par  $B$  la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $B$ .
- Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $B$ .

4 Étude d'une nouvelle variable aléatoire.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets. On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise. Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité (résultat arrondi à  $10^{-4}$  près).

## Exercice II

Le fabricant d'un test spécifique d'une maladie fournit les caractéristiques suivantes :

- quand une personne est malade, la probabilité que le test soit positif est 0,96,
- quand une personne n'est pas malade, la probabilité que le test soit négatif est 0,99.

Soit  $p$  le pourcentage de personnes malades dans la population ciblée par le test.

On notera  $M$  l'événement « la personne est malade » et  $T$  l'événement « le test est positif ».

① Faire un arbre pondéré représentant la situation.

② Montrer que  $P_T(M) = \frac{96p}{95p+1}$ . On pose  $f(p) = \frac{96p}{95p+1}$  pour  $0 \leq p \leq 1$ .

Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $[0 ; 1]$ .

Remplir un tableau de valeurs pour les valeurs suivantes de  $p$  :

0,001 ; 0,005 ; 0,01 ; 0,02 ; 0,05 ; 0,10 ; 0,20.

③ Montrer que  $P_T(\bar{M}) = \frac{99(1-p)}{99-95p}$ .

On pose  $g(p) = P_T(\bar{M})$  pour  $0 \leq p \leq 1$ .

Étudier le sens de variation de  $g$  sur  $[0 ; 1]$ .

Remplir un tableau de valeurs pour les mêmes valeurs de  $p$ .

④ On pose  $h(p) = P_T(\bar{M})$  pour  $0 \leq p \leq 1$ .

Vérifier que  $h(p) = 1 - f(p)$  et trouver le sens de variation de  $h$  sur  $[0 ; 1]$ .

Remplir un tableau de valeurs pour les mêmes valeurs de  $p$ .

⑤ On pose  $k(p) = P_T(M)$  pour  $0 \leq p \leq 1$ .

Vérifier que  $k(p) = 1 - g(p)$  et trouver le sens de variation de  $k$  sur  $[0 ; 1]$ .

Remplir un tableau de valeurs pour les mêmes valeurs de  $p$ .

⑥ Commenter les résultats obtenus.

## Exercice III

Sur une île, on découvre une nouvelle espèce d'animaux qu'on décide d'appeler mathoux. On cherche à savoir si les mathoux ont de la mémoire.

On considère l'expérience suivante : on enferme un mathou dans une cage dans laquelle il y a six portes identiques que le mathou peut pousser. Derrière l'une de ces portes, il y a un bout de fromage (on a observé que les mathoux sont friands de fromage).

① Dans cette question on suppose que le mathou n'a aucune mémoire et on appelle  $X$  le nombre d'essais nécessaires pour trouver le fromage.

a) Calculer la probabilité qu'il trouve le fromage au premier essai.

b) Calculer la probabilité qu'il trouve le fromage au deuxième essai.



- c) Calculer la probabilité qu'il trouve le fromage au sixième essai.
  - d) Calculer la probabilité qu'il trouve le fromage en au plus six essais.
- 2 On suppose maintenant que le mathou a une mémoire parfaite et qu'il ne pousse pas deux fois la même porte. On appelle  $Y$  le nombre d'essais nécessaires pour trouver le fromage. Donner la loi de probabilité de  $Y$  et déterminer  $P(Y \leq 6)$ .
  - 3 Quelle expérience pourrait-on réaliser pour tester l'hypothèse selon laquelle les mathoux ont une mémoire ?

### Exercice IV

On considère plusieurs sacs de billes  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  tels que :

- le premier,  $S_1$ , contient 3 billes blanches et 2 vertes ;
- chacun des suivants,  $S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$  contient 2 billes blanches et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille dans  $S_1$  ;
- on place la bille tirée de  $S_1$  dans  $S_2$ , puis on tire au hasard une bille dans  $S_2$  ;
- on place la bille tirée de  $S_2$  dans  $S_3$ , puis on tire au hasard une bille dans  $S_3$  ;
- etc.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note  $E_n$  l'évènement : « la bille tirée dans  $S_n$  est verte » et on note  $P(E_n)$  sa probabilité.

#### 1 Mise en évidence d'une relation de récurrence

a) D'après l'énoncé, donner les valeurs de  $P(E_1)$ ,  $P_{E_1}(E_2)$  et  $P_{E_1}^-(E_2)$ .  
En déduire la valeur de  $P(E_2)$ .

b) À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer  $P(E_{n+1})$  en fonction de  $P(E_n)$ .

#### 2 Étude d'une suite

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est majorée par  $\frac{1}{2}$ .

b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

c) Justifier que la suite  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite.

#### 3 Évolution des probabilités $P(E_n)$

a) À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités  $P(E_n)$ .

b) Pour quelles valeurs de l'entier  $n$  a-t-on :  $0,49999 \leq P(E_n) \leq 0,5$  ?

## Exercice V

Dans l'activité 2 et l'exercice 9, un algorithme a permis de simuler 1000 groupes de 30 personnes et de donner la fréquence des groupes où il existe une coïncidence d'anniversaires.

Dans cet exercice, on demande des probabilités.

- 1 Quelle est la probabilité qu'une personne rencontrée par hasard fête son anniversaire le même jour que vous ? (Pour faciliter la modélisation, on supposera que vos années de naissance ne sont pas bissextiles.)
- 2 Soit un groupe de  $n$  personnes. Quel est le plus petit entier  $n$  pour lequel la probabilité qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour est égale à 1 ?
- 3 Dans un groupe de 30 enfants nés en 2011, quelle est la probabilité que tous les anniversaires soient à des dates différentes ? Quelle est la probabilité que deux anniversaires au moins coïncident ?
- 4 Donner un algorithme qui permet de déterminer une valeur approchée de cette probabilité.  
À l'aide des résultats affichés par un tableur, déterminer à partir de quelle valeur de  $N$  la probabilité que deux anniversaires coïncident dans un groupe de  $N$  personnes est supérieure à 0,5.

## Exercice VI

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.

À l'instant 0, la puce est en A.

Pour tout entier naturel  $n$  :

- si à l'instant  $n$  la puce est en A, alors à l'instant  $(n+1)$ , elle est :  
soit en B avec une probabilité égale à  $\frac{1}{3}$ ,  
soit en C avec une probabilité égale à  $\frac{2}{3}$  ;
- si à l'instant  $n$  la puce est en B, alors à l'instant  $(n+1)$ , elle est :  
soit en C, soit en A de façon équiprobable ;
- si à l'instant  $n$  la puce est en C, alors elle y reste.

On note  $A_n$  (respectivement  $B_n$ ,  $C_n$ ) l'événement « à l'instant  $n$  la puce est en A » (respectivement en B, en C).

On note  $a_n$  (respectivement  $b_n$ ,  $c_n$ ) la probabilité de l'événement  $A_n$  (respectivement  $B_n$ ,  $C_n$ ).

On a donc :  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = c_0 = 0$  Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

- 1 Calculer  $a_k$ ,  $b_k$  et  $c_k$  pour  $k$  entier naturel tel que  $1 \leq k \leq 3$ .

- 2 a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n + b_n + c_n = 1$  et  $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \end{cases}$
- b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$ .
- c) En déduire que, pour tout entier naturel  $p$ ,  $\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p \text{ et } a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 \text{ et } b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$ .
- 3 Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ . On admet que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ . Quelle est la limite de  $c_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

