Sommaire

Grandeurs et mesures

A. Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans les unités adaptées

B. Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques

31. Grandeur composée

DÉFINITIONS

- Certaines **grandeurs** sont liées à des grandeurs de base par des **relations mathématiques**. On les appelle des **grandeurs composées**.

  1. Les **grandeurs produit** sont le produit de 2 ou 3 grandeurs.

  Exemple : l'aire A est une grandeur produit. L'aire *A* d'un carré dont la longueur des côtés est appelée c, est définie par la relation mathématique : $A = c \times c$.

  2. Les **grandeurs quotient** s'obtiennent en effectuant le quotient de deux grandeurs.

  Exemple : la vitesse v est une grandeur quotient. La vitesse v à laquelle on parcourt une distance d pendant le temps t est définie par la relation mathématique : $v = \frac{d}{t}$.

- L'**unité** des différentes grandeurs composées dépend de celles des grandeurs de base.

Les **relations mathématiques** qui donnent les grandeurs composées sont appelées **les formules**.

Exemples :

1. Travailler avec une **grandeur produit** : le volume.

a. **Convertir** en cm la mesure des trois côtés d'un parallélépipède rectangle, qui valent 22 cm, 5 dm et 3 m.

Pour faire des calculs de grandeurs composées il faut souvent **convertir** certaines grandeurs simples.

A. Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans des unités adaptées.

Tu peux faire un tableau pour t'aider : le mètre est l'unité de base.

Unité	**mètre**	décimètre	centimètre
Symbole	m	dm	cm
		2	2
		5	
	3		

Quand l'unité est « simple », on met 1 chiffre par colonne. Si on a des cm^2 par exemple, chaque colonne sera composée de 2 chiffres. Si on a des cm^3, chaque colonne sera composée de 3 chiffres.

Unité	**mètre**	décimètre	centimètre
Symbole	m	dm	cm
		2	2
		5	0
	3	0	0

On complète les colonnes qui ne vont pas jusqu'à l'unité choisie, ici le centimètre, par des 0.
On a donc comme mesures des trois côtés : 22 cm, 50 cm et 300 cm.

b. **Calculer le volume** de ce parallélépipède rectangle.

V = longueur du côté 1 × longueur du côté 2 × longueur du côté 3
Avec les mesures de l'exercice, on a $V = 22 \times 50 \times 300 = 330\,000$.

c. En **quelle unité** est exprimé le volume ?

On reprend les unités des grandeurs de base : toutes les longueurs sont exprimées en cm. On multiplie les unités entre elles, comme les longueurs dans la formule : $cm \times cm \times cm = cm^3$.
L'unité du volume est donc exprimée en cm^3.
$\underline{V = 330\,000\ cm^3}$

2) Travailler avec une **grandeur quotient** : la vitesse.

a. **Convertir** 1 h 45 en nombre décimal d'heures.

$$1\ h\ 45 = 1\ h + \frac{45}{60}\ h = 1\ h + 0{,}75\ h = 1{,}75\ h$$

A. Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans des unités adaptées.

Attention !

1 h 45 est différente de 1, 45 heure. 1, 45 heure est équivalente à 1 h 27.

b. Un individu a parcouru 10 km en 1 h 45. À **quelle vitesse** marchait-il ?

On utilise la formule $v = \frac{d}{t}$. On remplace d et t par les grandeurs de l'exercice :

$v = \frac{10}{1,75} = 5,7$

c. En **quelle unité** est exprimée la vitesse ?

On reprend les unités des grandeurs de base : la distance est exprimée en km, le temps en h donc la vitesse est exprimée en km/h qui se lit « kilomètres par heure ». On dit aussi « kilomètres heure ». On peut noter aussi km.h^{-1} ou km/h.

32. Grandeurs produit : l'aire, le volume, l'énergie...

UNITÉS DES GRANDEURS PRODUIT

Quand on multiplie des grandeurs entre elles, **leurs unités sont aussi multipliées entre elles** :

1. Quand on multiplie **deux grandeurs** entre elles :

- Si **les deux unités sont identiques**, on obtient une unité au **carré** :
  Exemple : l'aire d'un rectangle est le produit de sa longueur, en mètre, par sa largeur, en mètre. L'unité de l'aire est le $m \times m = m^2$, qu'on lit « mètre carré » et qu'on écrit m^2.
- Si les deux unités ne sont pas identiques, on colle les deux unités :
  Exemple : l'énergie consommée est donnée par la formule : $E = P \times t$ où P, la puissance, est en watt et t, le temps, en heure. L'unité de l'énergie est le $w \times h$, qu'on lit « watt heure » et qu'on écrit wh.

2. Quand on multiplie **trois grandeurs** entre elles :

- Si **les trois unités sont identiques**, on obtient une unité au **cube** :
  Exemple : le volume d'un parallélépipède rectangle est le produit de sa longueur, en mètre, par sa largeur, en mètre, par sa hauteur, en mètre. Le volume a pour unité le $m \times m \times m = m^3$, qu'on lit « mètre cube » et qu'on écrit m^3.

Exemple : dans la salle de classe, il y a 7 ampoules de 60 w. **Quelle est l'énergie consommée** pendant un cours de 1 h 15 ? Donner la réponse en wh puis en kwh.

On convertit 1 h 15 en nombre décimal d'heures : $1\text{ h }15 = 1\text{ h} + \frac{15}{60}\text{ h} = 1\text{ h} + 0{,}25\text{ h} = 1{,}25\text{ h}$.

On calcule l'énergie consommée par une ampoule : $E = P \times t = 60 \times 1{,}25 = 75$ wh.

Comme il y a 7 ampoules, l'énergie consommée dans la salle de classe est : $\underline{E = 7 \times 75 = 525\text{ wh}}$.

L'énergie consommée en 1 h 15 dans la salle de classe est de 525 wh.

Pour convertir en kwh on peut s'aider d'un tableau :

Unité	kilowatt	hectowatt	décawatt	**watt**
Symbole	kw	hw	daw	w
	0	5	2	5

On complète les colonnes pour aller jusqu'à l'unité choisie, ici le kilowatt. On ajoute un 0 et une virgule.

L'énergie consommée en 1 h 15 dans la salle de classe est de 0,525 kwh.

33. Grandeurs quotient : la vitesse, le débit, la masse volumique...

UNITÉS DES GRANDEURS PRODUIT

- La grandeur quotient la plus couramment utilisée est celle de la **vitesse moyenne** v, qui se calcule à l'aide de la distance d et du temps t.

$$v=\frac{d}{t}$$

L'unité de la vitesse moyenne est le kilomètres par heure ou kilomètres heure : **km/h**.
On peut noter aussi $km.h^{-1}$.

- La **masse volumique** ρ se calcule à l'aide de la masse m et du volume V :

$$\rho=\frac{m}{V}$$

L'unité de la masse volumique est le gramme par centimètre cube : **g/cm^3**.

- Le **débit D** se calcule à l'aide du volume V et du temps t :

$$D=\frac{V}{t}$$

L'unité du débit est le litre par minute : **L/min**.

- L'**indice de masse corporelle I** se calcule à l'aide du poids P et de la taille T :

$$I=\frac{P}{T^2}$$

L'unité de l'indice de masse corporelle est le kilogramme par m^2 : **kg/m^2**.

Exemple : **calculer l'indice de masse corporelle** d'un individu qui pèse 85 kg et qui mesure 1 m 80.

$I=\frac{P}{T^2}=\frac{85}{1{,}8^2}=26{,}2\,km/m^2$. Cet individu a un indice de masse corporelle de 26,2 kg/m^2.

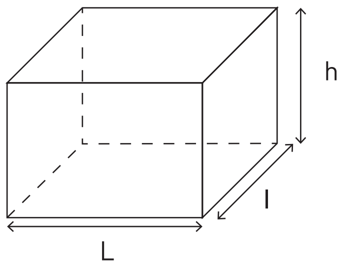
Attention !

- Comme 1 m vaut 100 cm, l'écriture décimale de 1 m 80 est 1,8 m.
- Ce n'est pas le cas des heures, puisqu'une heure compte 60 minutes. Pour trouver l'écriture décimale d'une durée en heures, il faut donc diviser par 60 les minutes :

$$1\,h\,50=1\,h+\frac{50}{60}\,h=1\,h+0{,}8\,h=1{,}8\,h$$

34. Volume d'un solide

I. Le parallélépipède rectangle ou pavé droit, et le cube



DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

Un **parallélépipède rectangle**, qu'on appelle aussi **pavé droit**, est un solide dont les **6 faces** sont **des rectangles**.

Le volume V d'un pavé de **longueur L**, de **largeur l**, et de **hauteur h** est donné par la formule :

$$V = L \times l \times h$$

Ce volume est le produit de 3 dimensions. C'est donc une **grandeur produit** et son unité est une **unité de base au cube**.

Si les faces de côté c sont carrées alors le solide est un cube de volume : $V = c^3$.

Exemple :

Calculer **le volume** d'un parallélépipède rectangle de longueur 8 cm, de largeur 6 cm et de hauteur 4 cm.

$V = L \times l \times h$

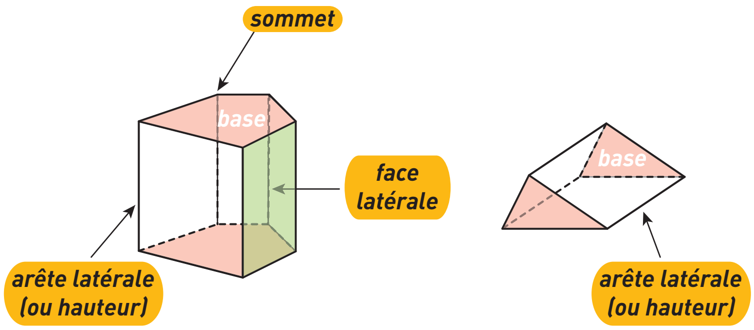
$V = 8 \times 6 \times 4$

$V = 192 \text{ cm}^3$

Le parallélépipède rectangle a un volume de 192 cm^3.

A. Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans des unités adaptées.

II. Le prisme droit



DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

Un **prisme droit** est un solide qui a **deux faces parallèles et superposables**, **les bases**, qui sont **des polygones**. Toutes les autres faces, les **faces latérales**, sont **des rectangles**.

Le volume V d'un prisme droit, dont l'**aire de la base est A** et de **hauteur h**, est donné par la formule :

$$V = A \times h$$

Ce volume est le produit de deux dimensions, mais l'aire est à deux dimensions. C'est donc une **grandeur produit** et son unité est une **unité de base au cube**.

Exemples :

1. Calculer **le volume** d'un prisme droit de hauteur 18 cm et qui a 15 cm^2 comme aire de base.

$V = A \times h = 15 \times 18 = 270$ cm^3.

Le prisme droit a un volume de 270 cm^3.

2. On s'intéresse à un prisme droit dont la base est un triangle. La hauteur du prisme est de 4 cm. Le triangle de base, ABC, est rectangle en A et ses côtés ont pour longueurs : AB = 4 cm et AC = 6 cm. Quel est **le volume** de ce prisme droit ?

Le triangle ABC est rectangle en A. On peut donc facilement calculer son aire A1 :

$$A1 = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = \frac{24}{2} = 12\,cm^2$$

On peut à présent calculer le volume V du prisme droit :

$V = A1 \times h = 12 \times 4 = 48$ cm^3.

Le prisme droit a un volume de 48 cm^2.

III. Le cylindre de révolution

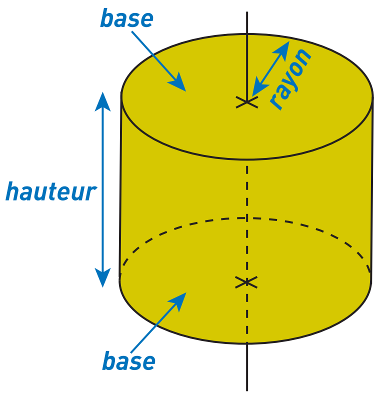
DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

Un **cylindre de révolution** est un solide qui a **deux faces parallèles et superposables**, **les bases**, qui sont **des disques**. Il a une **unique face latérale**, qui, une fois « étalée » donne un rectangle ou un carré.

Le volume V d'un cylindre de révolution, dont l'**aire de la base est A** et de **hauteur h**, est donné par la formule :

$$V = A \times h$$

Ce volume est le produit de deux dimensions, mais l'aire est à deux dimensions. C'est donc une **grandeur produit** et son unité est une **unité de base au cube**.



L'aire A d'un disque de rayon r est donnée par la formule : $A = \pi \times r^2$.

On a donc comme formule du volume du prisme : $V = \pi \times r^2 \times h$.

Exemple : on s'intéresse à un cylindre de révolution de hauteur 7 cm et de diamètre de base de 12 cm. Quel est **le volume** de ce cylindre ?

On commence par calculer le rayon r du disque : $r = \frac{12}{2} = 6\,\text{cm}$.

On peut à présent calculer le volume V du cylindre de révolution :

$V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 6^2 \times 7 \approx 792\ \text{cm}^3$

Le cylindre de révolution a un volume de 792 cm^3.

A. Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans des unités adaptées.

IV. La pyramide

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

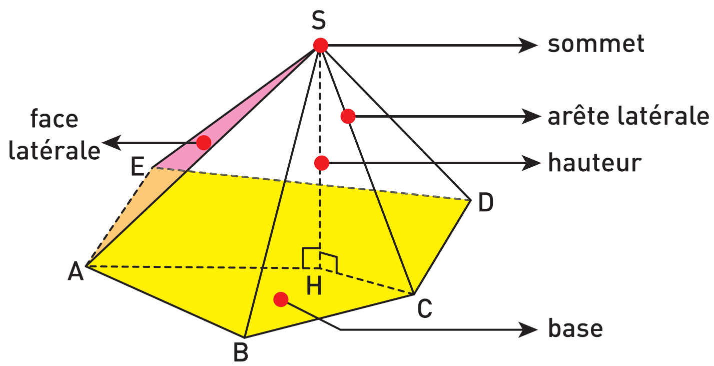
Une **pyramide** est un solide dont **la base** est un **polygone**. Les **faces latérales**, sont **des triangles**. Le sommet commun des triangles est le **sommet de la pyramide**.

Le volume V d'une pyramide, dont l'**aire de la base est A** et de **hauteur h**, est donné par la formule :

$$V = 1/3\ (A \times h)$$

Ce volume est le produit de deux dimensions, mais l'aire est à deux dimensions. C'est donc une **grandeur produit** et son unité est une **unité de base au cube**.

La mesure $\frac{1}{3}$ est sans unité.



Exemple :

On s'intéresse à une pyramide de base carrée. Les côtés du carré font 5 cm. La hauteur de la pyramide fait 90 mm. Quel est **le volume** de la pyramide ?

On calcule l'aire de la base. L'aire A du carré est $A = 5 \times 5 = 25\ cm^2$.

On convertit la hauteur en cm : 90 mm = 9 cm.

On calcule le volume V de la pyramide : $V = \frac{1}{3} \times A \times h = \frac{1}{3} \times 25 \times 9 = \frac{25 \times 3 \times 3}{3} = 75\ cm^3$.

La pyramide de base carrée a un volume de 75 cm^3.

A. Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans des unités adaptées.

V. Le cône

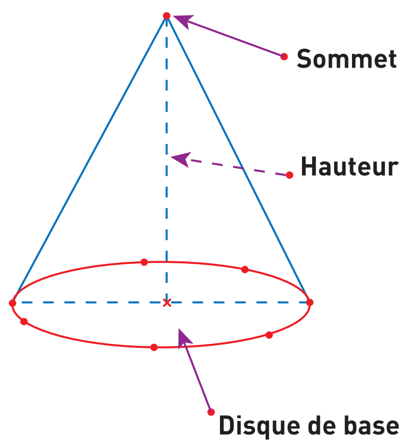
DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

Un **cône de révolution** est un solide dont **la base** est un **disque**. Il a une **unique face latérale**, non plane. Cette face latérale est un secteur circulaire dont le centre est **le sommet du cône**.

Le volume V d'un cône, dont l'**aire de la base est A** et de **hauteur h**, est donné par la formule :

$$V = 1/3\ (A \times h)$$

Ce volume est le produit de deux dimensions, mais l'aire est à deux dimensions. C'est donc une **grandeur produit** et son unité est une **unité de base au cube**.



L'aire A d'un disque de rayon r est donnée par la formule : $A = \pi \times r^2$.
On a donc comme formule du volume du cône : $V = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$.

Exemple :
Un chapeau de clown est un cône de révolution de diamètre 35 cm et de hauteur 20 cm. Quel est le volume du chapeau ?

On détermine le rayon du disque de base : $r = \frac{35}{2} = 17{,}5\,\text{cm}$.

On calcule le volume V de la pyramide : $V = \frac{1}{3} \times A \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 17{,}5^2 \times 20\ ^\circ\ 6\,414\,\text{cm}^3$.

Le volume du chapeau de clown est d'environ 6 414 cm^3.

VI. La sphère et la boule

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

La **sphère** de centre O et de rayon r est l'ensemble des **points** de l'espace qui sont **tous à une distance r de O**.

Exemple : la bulle de savon.

L'aire d'une sphère de rayon r est donnée par la formule :

$$A = 4 \times \pi \times r^2$$

L'aire est le produit de deux dimensions : $r \times r = r^2$. C'est donc une **grandeur produit** et son unité est une **unité de base au carré**.

Une **sphère** est creuse. Elle n'a qu'une **surface** (même si elle délimite un volume). Une **boule** est pleine. Elle a donc une **surface** et un **volume**.

Exemple : Une balle de ping-pong est une sphère tandis qu'une boule de pétanque est une boule.

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

La **boule** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace qui sont à une **distance de O**, **inférieure et égale à r**.

Exemple : une boule de glace.

Le volume V d'une sphère de rayon r est donné par la formule :

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

Ce volume est le produit de trois dimensions : $r \times r \times r = r^3$. C'est donc une **grandeur produit** et son unité est une **unité de base au cube**.

A. Calculer avec des grandeurs mesurables ; exprimer les résultats dans des unités adaptées.

Surface et **aire** sont la **même chose**.

Exercice : Un boule de pétanque a une surface de 808,64 cm³.

Quel est **son volume** ?

On cherche d'abord son rayon à l'aide de la formule : $A = 4 \times \pi \times r^2$.

On remplace par les valeurs qu'on connaît : $808{,}64 = 4 \times \pi \times r^2$

$$r^2 = \frac{808{,}64}{4 \times \pi} \circ 64$$

Donc $r = \sqrt{64} = 8\,\text{cm}$.

On calcule ensuite le volume à l'aide de la formule : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$.

On remplace par les valeurs qu'on connaît : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 8^3 = 2\,144{,}66\,\text{cm}^3$.

Le volume de la boule de pétanque est de 2 144,66 cm³.

B. Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques.

35. Agrandissement

En géométrie, **agrandir** une figure signifie qu'on **augmente toutes ses dimensions** de manière proportionnelle.

DÉFINITION

L'**agrandissement** d'une figure est déterminé par un **coefficient d'agrandissement**, qu'on nomme **k**. On trouve la valeur de k en calculant le quotient suivant :

$$k = \frac{\text{dimension agrandie}}{\text{dimension initiale}}$$

Le coefficient d'agrandissement **k** est **sans unité**. k est **plus grand que 1**.

La **dimension initiale** est la **dimension de départ**.

Exemple : On double les dimensions d'un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 2 cm.

Quelles sont **les dimensions** du rectangle agrandi ? Quel est **le coefficient d'agrandissement** ?

Doubler signifie « multiplier par deux ». Le rectangle agrandi a donc pour dimensions de **10 cm** pour la longueur et une largeur de 4 cm.

On utilise la formule du coefficient d'agrandissement : $k = \frac{\text{dimension agrandie}}{\text{dimension initiale}}$.

On remplace par les valeurs qu'on connaît, pour la longueur par exemple :

$$k = \frac{\text{longueur agrandie}}{\text{longueur initiale}} = \frac{10}{5} = 2.$$

B. Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques.

PROPRIÉTÉS

- Pour **agrandir une figure** à l'aide d'un coefficient d'agrandissement k, on doit **multiplier toutes ses dimensions par k** :

  dimension agrandie = dimension initiale × k

- Un agrandissement **conserve la mesure des angles**.

  Exemple : on double les dimensions d'un rectangle. Sa longueur et sa largeur doublent mais ses angles restent égaux à 90°.

- Quand on multiplie toutes les dimensions d'une figure par k :

  1. Son **aire** est **multipliée par k^2**.

  2. Son **volume** est **multiplié par k^3**.

Exemples :

1. Un triangle a une aire A de 15 cm². Quelle est l'**aire A′ du triangle**, obtenue après un agrandissement de coefficient $k = 3$?

On multiplie l'aire initiale par le coefficient d'agrandissement au carré :

$A' = A \times k^2 = 15 \times 3^2 = 135$ cm².

L'aire du triangle agrandi est de 135 cm².

2. Une maison de poupée a une hauteur de 30 cm, une surface au sol de 1,2 m² et un volume total de 0,3 m³. Une maison d'habitation est un agrandissement de cette maison de poupée avec un coefficient d'agrandissement de 10. Quelle est la **hauteur** de la maison d'habitation, **son aire** ainsi que **son volume** ?

On appelle h′ la hauteur de la maison d'habitation : $h' = 30 \times k = 30 \times 10 = 300$ cm.

On appelle A′ l'aire de la maison d'habitation : $A' = 1{,}2 \times k^2 = 1{,}2 \times 10^2 = 1{,}2 \times 100 = 120$ m².

On appelle V′ l'aire de la maison d'habitation: $V' = 0{,}3 \times k^3 = 0{,}3 \times 10^3 = 0{,}3 \times 1\,000 = 300$ m³.

La hauteur de la maison d'habitation est de 3 m. Son aire est de 120 m² et son volume de 300 m³.

B. Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques.

36. Réduction

En géométrie, **réduire** une figure signifie qu'**on diminue toutes ses dimensions** de manière proportionnelle.

DÉFINITION

La **réduction** d'une figure est déterminée par un **coefficient de réduction**, qu'on nomme **k**.
On trouve la valeur de k en calculant le quotient suivant :

$$k = \frac{\text{dimension réduite}}{\text{dimension initiale}}$$

Le coefficient de réduction **k** est **sans unité**. k est **plus petit que 1** et **plus grand que 0**.
$(0 < k < 1)$.

Attention !

Dans le cas d'un **agrandissement**, k est **plus grand que 1**. Dans le cas d'une **réduction**, k est **plus petit que 1**.

B. Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques.

PROPRIÉTÉS

- Pour **réduire une figure** à l'aide d'un coefficient de réduction k, on doit **multiplier toutes ses dimensions par k** :

$$\text{dimension agrandie} = \text{dimension initiale} \times \text{k}$$

- Une réduction **conserve la mesure des angles**.
Exemple : on divise par deux les dimensions d'un rectangle. Sa longueur et sa largeur sont divisées par deux mais ses angles restent égaux à 90°.
- Quand on multiplie toutes les dimensions d'une figure par k :
1. Son **aire** est **multipliée par k^2**.
2. Son **volume** est **multiplié par k^3**.

Exemple : une sculpture a une hauteur de 2 m et un volume de 120 dm^3. On veut réaliser une maquette qui sera une réduction de la sculpture et dont la hauteur sera de 0,60 m.

Quel sera **le volume** de la maquette ?

On commence par calculer le coefficient de réduction k :

$$k = \frac{\text{dimension réduite}}{\text{dimension initiale}} = \frac{0{,}6}{2} = 0{,}3.$$

Comme $0{,}3 < 1$, on a bien un coefficient de **réduction**.

On appelle V′ le volume de la maquette : $V' = 120 \times 0{,}3^3 = 3{,}24$ dm^3.

Le volume de la maquette sera de 3,24 dm^3.

37. Échelles

DÉFINITION

L'**échelle**, notée e, est le quotient de la longueur sur un plan par la longueur réelle.
Les deux longueurs sont exprimées dans la **même unité** :

$$e = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur dans la réalité}}$$

Trois cas sont possibles :

1. Si $e = 1$, les longueurs réelles et sur le plan sont identiques. On n'a ni agrandi ni réduit.

2. Si $e > 1$, alors on effectue un agrandissement de la réalité.

Exemple : le dessin d'une bactérie est un agrandissement de la réalité.

3. Si $e < 1$, alors on effectue une réduction de la réalité.

Exemple : une carte routière est une réduction de la réalité.

On exprime l'échelle sous forme d'une fraction avec un **numérateur** et un **dénominateur** qui sont des **nombres entiers**.

Exemples :

1. Sur une carte routière d'échelle $e = \frac{1}{50\,000}$, deux villages sont distants de 7,5 cm. Quelle est la **distance réelle**, **en km**, entre ces deux villages ?

L'échelle $e = \frac{1}{50\,000}$ signifie qu'1 cm sur le plan vaut 50 000 cm dans la réalité.

$D = 7{,}5 \text{ cm} \times 50\,000$

$D = 375\,000 \text{ cm}$

$D = 3{,}75 \text{ km}$

2. Kévin a dessiné sa chambre. La largeur réelle d'un des côtés de la pièce est de 6 mètres et, sur son plan, il a construit un segment de 3 centimètres. Quelle est l'**échelle** de son plan ?

B. Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques.

On exprime d'abord les longueurs dans la même unité :

6 m = 600 cm

L'échelle e se calcule à l'aide de la formule suivante : $e = \dfrac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur dans la réalité}}$.

On remplace avec les valeurs qu'on connaît :

$$e = \frac{3}{600} = \frac{1 \times 3}{200 \times 3} = \frac{1}{200}.$$

On conclut : l'échelle du plan de Kévin est $e = \dfrac{1}{200}$.

Notes